ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.А. Харченко

ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2008

Утверждено научно-методическим советом факультета философии и психологии 25 марта 2008 г., протокол № 1400-03

Рецензент Н.И. Вьюнова

Учебное пособие подготовлено на кафедре общей и социальной психологии факультета философии и психологии Воронежского государственного университета.

Рекомендовано для студентов 2-го курса очной и 4 курса очно-заочной форм обучения отделения психологии факультета философии и психологии ВГУ.

Для специальности: 030301 – Психология
ОПД.Ф.11

СОДЕРЖАНИЕ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Основными понятиями теории статистического вывода являются: *популяция*, *выборка*, *генеральная* и *выборочная совокупности*, *параметры* распределений случайной величины и их *статистические оценки* (*статистики*), *точечное* и *интервальное оценивание*, *статистическая проверка гипотез*, *статистический критерий*.

§ 1. Генеральные и выборочные характеристики

Всякая большая (конечная или бесконечная) совокупность испытуемых (например, совокупность всех студентов-психологов 2 курса) называется *популяцией*, а совокупность их результатов – *генеральной совокупностью*. Психологические характеристики обычно изучают путем обследования *выборки* – ограниченного числа испытуемых, результаты которых образуют *выборочную совокупность*. Таким образом, выборка – это часть (подмножество) популяции, а выборочная совокупность – подмножество генеральной совокупности.

Число элементов популяции / выборки / генеральной, выборочной совокупности называется *объемом*.

Генеральные числовые характеристики, вычисляемые на основании изучения популяции, характеризуют всю популяцию в целом и являются <u>детерминированными</u> величинами (при многократном измерении их значения остаются постоянными в пределах точности измерения); они представляют собой *параметры* θ совокупности. Для выборок те же числовые характеристики – *статистические оценки* параметров θ^* (*статистики*) – являются <u>случайными</u> величинами. Они всегда в большей или меньшей степени отличаются от генеральных характеристик – значений параметров по причинам, связанным с неоднородностью выборок и индивидуальными различиями испытуемых.

Так как значения параметров в реальном исследовании получить невозможно (для этого необходимо многократно исследовать всю популяцию), в теории статистического вывода прибегают к методам *оценивания*. Его суть заключается в приблизительной оценке параметров генеральной совокупности по статистикам выборки.

Имеется два метода оценивания: *точечное* и *интервальное*, соответственно выделяют точечные и интервальные оценки параметров. Метод интервального оценивания был разработан американским математиком Ю. фон Нейманом, исходя из идей английского математика Р. Фишера.

Точечной называется оценка параметра, которая определяется одним числом (то есть ее можно представить в виде точки на числовой оси). Интервальной называется оценка параметра, которая определяется интервалом на числовой оси, в пределах которого с определенной вероятностью P лежит значение оцениваемого параметра θ:

$$\theta^*_{\min} < \theta < \theta^*_{\max}.$$

Интервал ($\theta^*_{\min}$; $\theta^*_{\max}$), который с вероятностью P содержит в себе оцениваемый параметр, называется *доверительным интервалом*, а соответствующая вероятность P – *доверительной вероятностью*. Границы доверительного интервала, как и точечные оценки, являются случайными величинами: от выборки к выборке они могут меняться. В силу этого следует говорить не о «вероятности попадания параметра в доверительный интервал», а о «вероятности того, что доверительный интервал *накроет* параметр θ».

Статистические оценки (как точечные, так и интервальные) характеризуются *точностью*, *надежностью* и *валидностью*. Точность статистической оценки отражает степень ее близости к истинному значению измеряемого параметра. Надежность оценки – это характеристика устойчивости результатов измерения; она показывает, как сильно могут отличаться результаты исследования при его повторении в сопоставимых условиях (например, психологический тест как измерительный инструмент обладает высокой надежностью, если при повторном тестировании вызывает у испытуемых реакцию, аналогичную первой; эксперимент с высокой надежностью дает близкие результаты при его повторном проведении в тех же условиях, с тем же материалом, но на других выборках). Валидность отражает степень достоверности и адекватности оценивания: валидной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое, но не среднее квадратическое отклонение.

Оценкой точности интервальных оценок служит величина доверительного интервала: чем он шире, тем точность оценки ниже. Точность точечных оценок определяется *абсолютной* и *относительной погрешностями (ошибками)*. Абсолютной погрешностью δ называется абсолютная величина (модуль) отклонения оценки от истинного значения параметра:

$$\delta = |\theta^* - \theta|.$$

Чем меньше значение абсолютной ошибки δ, тем выше точность, то есть статистическая оценка θ^* точнее определяет параметр θ. Относительной погрешностью (ошибкой) E называется отношение абсолютной погрешности δ к оценке параметра θ^*:

$$E = \frac{|\theta^* - \theta|}{\theta^*}.$$

Надежность точечной оценки рассчитывается с помощью *средней квадратической ошибки параметра* s_θ – усредненного квадрата ошибки δ:

$$s_\theta = \sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta^2},$$

где δ – ошибка параметра, n – объем выборки. Средняя квадратичная ошибка параметра s_θ служит мерой надежности в том смысле, что чем она меньше, тем надежность статистической оценки больше, и наоборот.

Надежность интервальной оценки – *доверительная вероятность P* – вероятность того, что доверительный интервал заключает в себе оцениваемый параметр. Чем она больше, тем выше надежность оценки, характеризующая лучшую воспроизводимость результатов, и наоборот. Надежность P задается перед проведением исследования, причем в качестве доверительной вероятности берется число, близкое к единице (или 100 %). В психологических исследованиях уровни доверительной вероятности принимаются равными 0,95 или 0,99.

Точность и надежность связаны друг с другом: чем шире доверительный интервал, тем больше надежность и меньше точность оценки, и наоборот. Стопроцентной надежности соответствует доверительная вероятность $P = 1$, которой в свою очередь соответствует доверительный интервал $(-\infty; +\infty)$: только в этом случае имеем достоверное событие, вероятность которого равна единице. Отсюда следует, что:

1) **провести исследование со стопроцентной надежностью невозможно в принципе**;

2) психолог должен «позволить» себе совершать ошибку в каждом исследовании!

Вероятность ошибки $\alpha = 1 - P$ называется *уровнем значимости* α и всегда указывается в статистическом выводе психологического исследования. Доверительным вероятностям 0,95 и 0,99 соответствуют уровни значимости α = 0,05 (5 %) и 0,01 (1 %), которые показывают, что только в пяти случаях из ста (или одном случае из ста) возможна ошибка.

§ 2. Точечное оценивание

Точечное оценивание позволяет приблизительно оценить параметры генеральной совокупности по статистикам (статистическим оценкам) выборки. К точечным оценкам параметров предъявляются требования *состоятельности*, *эффективности* и *несмещенности*.

Состоятельной называется статистическая оценка, если она с увеличением объема выборки приближается к оцениваемому параметру: $\lim_{n\to\infty}\theta^* = \theta$. Точечная оценка является *эффективной*, если она обладает минимальной дисперсией по сравнению с другими оценками. Наконец, точечная оценка является *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки: $M(\theta^*) = \theta$. Используемые в математической статистике оценки не всегда удовлетворяют одновременно всем этим требованиям, что необходимо корректировать, вводя специальные поправки.

Статистической оценкой **вероятности** события является среднее значение относительной частоты:

$$\overline{w} = \frac{1}{N}\sum_i w_i = \frac{1}{N}\sum_i \frac{k_i}{n}.$$

Здесь: N – количество экспериментов, k_i – число появлений события в i-м эксперименте; n – количество опытов в каждом из N экспериментов, $\frac{k_i}{n} = w_i$ – относительная частота появления события в i-м эксперименте.

Статистическими оценками **математического ожидания** являются *выборочное среднее арифметическое* $\overline{x}$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}$$

и *выборочное среднее геометрическое* $\overline{x}_G$

$$\boxed{\overline{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{n_n}}}.$$

Здесь n – объем выборки, x_i – измеряемые значения, n_i – их частоты.

Среднее геометрическое значение удобнее находить путем логарифмирования $\overline{x}_G$ по любому основанию $a > 0$ ($a \neq 1$):

$$\log_a \overline{x}_G = \log_a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a \prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_a x_i^{n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot \log_a x_i).$$

Значение $\overline{x}_G$ получается путем потенцирования последнего выражения

$$\boxed{\overline{x}_G = a^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot \log_a x_i)}}.$$

В случае большого объема выборки ($n > 50$) необходимо предварительно систематизировать эмпирические данные, представив результаты в виде *вариационного ряда*

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_n.$$

Далее следует произвести группировку результатов, для чего *размах варьирования* изучаемой характеристики $R = x_{\max} - x_{\min}$ необходимо разбить на целое число m равных интервалов, определяемое по *формуле Стерджеса*:

$$m = 1 + 3{,}32 \lg n,$$

где n – объем выборки. Выборочное среднее значение вычисляется по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j n_j,$$

где n – объем выборки, x_j – значение характеристики в середине j-го интервала, n_j – частота: число наблюдений, заключенное в j-м интервале, m – число интервалов. Группировка данных приводит к некоторой неточности расчета выборочного среднего, однако получаемой при этом погрешностью при большом объеме выборки можно пренебречь.

Выборочная медиана $x_{0,5}$ является статистической оценкой **медианы**. Она делит выборку на две равные части по количеству полученных значений. Для ее вычисления эмпирические данные необходимо представить в виде вариационного ряда. При нечетном объеме выборки выборочная медиана равна среднему члену вариационного ряда, при четном объеме выборки – среднему арифметическому двух членов вариационного ряда, находящихся в его середине. Середина вариационного ряда находится по формуле $\frac{n+1}{2}$, где n – объем выборки.

Статистическая оценка **моды** – *выборочная мода* x_0. Она определяется как значение показателя, имеющего наибольшую частоту. Распределения с двумя модами называются *бимодальными*, с несколькими модами – *полимодальными*. Имеются соглашения об использовании моды:

1. Если все значения в выборке встречаются одинаково часто, то в этом случае считается, что моды нет. Например, нет моды в распределении *5, 5, 16, 16, 29, 29*.

2. Когда два соседних значения имеют одинаковую частоту, которая больше частоты любого другого значения, мода есть среднее этих двух значений: в распределении *1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4* мода равна 2,5.

3. Если два несмежных значения имеют равные частоты, которые больше частоты любого другого значения, то распределение является бимодальным: распределение *10, 11, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 14, 15* является бимодальным с модами, равными 11 и 14.

Статистической оценкой **дисперсии** является *выборочная дисперсия* s^2, которая вычисляется по формулам

$$\boxed{s^2 = \frac{SS}{df} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}$$

или

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2} n_i\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2\right],$$

где SS – сумма квадратов, $df = n - 1$– число степеней свободы, n – объем выборки, x_i – значения изучаемой характеристики, $\bar{x}$ – выборочное среднее, n_i – частоты.

В случае большого объема выборки ($n > 50$) эмпирические данные предварительно систематизируются в виде вариационного ряда и группируются. Выборочная дисперсия вычисляется по формулам

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 \cdot n_j = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^2 n_j\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j n_j\right)^2\right],$$

где x_j – значение характеристики в середине j-го интервала, n_j – частота, или число наблюдений в j-м интервале, m – число интервалов, n – объем выборки. Группировка данных приводит к некоторой неточности расчета дисперсии, однако получаемой при этом погрешностью при большом объеме выборки можно пренебречь.

Эффективной, состоятельной и несмещенной оценкой **среднего квадратического (стандартного) отклонения** является *«исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение*:

$$\boxed{s' = c_n \cdot \sqrt{s^2}},$$

где c_n – поправочный коэффициент, зависящий от объема выборки n; при $n > 60$ можно принять $c_n = 1$ (табл. 1). Квадратный корень из выборочной дисперсии $\sqrt{s^2}$ без поправочного коэффициента в случае малого объема выборки является эффективной, состоятельной, но смещенной оценкой среднего квадратического отклонения.

Таблица 1

Значения поправочных коэффициентов c_n и β_n

n	c_n	β_n	***n***	c_n	β_n	***n***	c_n
1	–	–	11	1,025	0,9300	25	1,010
2	1,253	0,5642	12	1,023	0,9359	30	1,008
3	1,128	0,7236	13	1,021	0,9410	35	1,007
4	1,085	0,7979	14	1,019	0,9453	40	1,006
5	1,064	0,8407	15	1,018	0,9490	45	1,006
6	1,051	0,8686	16	1,017	0,9523	50	1,005
7	1,042	0,8882	17	1,016	0,9551	55	1,004
8	1,036	0,9027	18	1,015	0,9576	60	1,004
9	1,032	0,9139	19	1,014	0,9599	> 60	1
10	1,028	0,9227	20	1,013	0,9619		

Оценка среднего квадратического отклонения по результатам обследования <u>нескольких выборок одинакового объема</u> производится по формуле

$$\boxed{s = \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{m \cdot \beta_n \sqrt{\frac{n}{n-1}}}},$$

где m – количество выборок, n – объем каждой выборки, $s_j = c_n \cdot \sqrt{s_j^2}$ – выборочные средние квадратические отклонения, β_n – коэффициент, зависящий от объема выборки; при $n > 20$ можно принять $\beta_n = 1$ (табл. 1).

Для сравнения рассеяния разноименных случайных величин в отдельных случаях применяются безразмерные меры рассеяния. Одной из них служит выборочный **коэффициент вариации** $v = \frac{s}{\bar{x}}$, представляющий собой отношение среднего квадратического отклонения к выборочному среднему значению. Часто коэффициент вариации выражают в процентах.

Статистической оценкой **асимметрии** – меры «скошенности» распределения – является *выборочный показатель асимметрии*:

$$\boxed{\bar{A} = \frac{1}{ns^3}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3 \cdot n_i},$$

где n – объем выборки, x_i – значения характеристик, n_i – их частоты, $\bar{x}$ – выборочное среднее, s – выборочное среднее квадратическое отклонение. В случае большого объема выборки ($n > 50$) выборочный показатель асимметрии удобнее вычислять по формуле

$$\bar{A} = \frac{1}{ns^3}\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \bar{x}\right)^3 \cdot n_j .$$

Здесь x_j – значение характеристики в середине j-го интервала, n_j – частота, или число наблюдений в j-м интервале, m – число интервалов.

Показатель асимметрии изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. При $A = 0$ распределение считается симметричным, при $A > 0$ распределение имеет «скошенность» влево (длинный хвост распределения справа) и при $A < 0$ распределение «скошено» вправо (длинный хвост слева) (рис. 1). Для асимметричных распределений характерен сдвиг частот от средних значений: вправо ($A > 0$) или влево ($A < 0$).

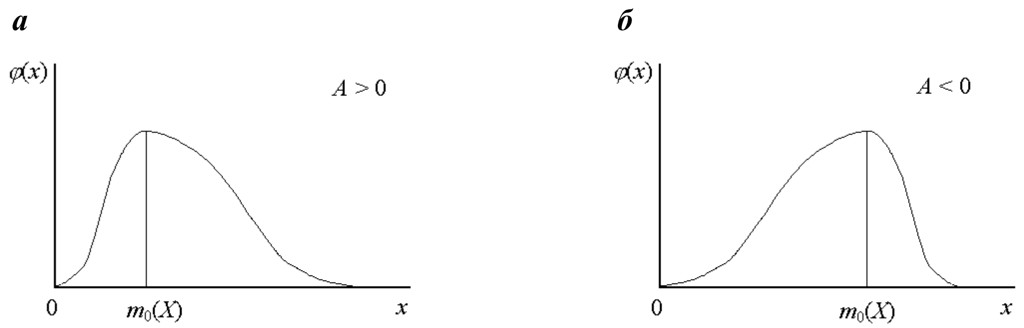


Рис. 1. Асимметрия распределения: положительная (*а*) и отрицательная (*б*)

Статистической оценкой **эксцесса** распределения – меры выпуклости или пологости верхней части кривой распределения – является *выборочный показатель эксцесса* (рис. 2). Для эксцессивных кривых характерно чрезмерное накапливание частот в центральных классах (положительный эксцесс) или, наоборот, снижение (отрицательный эксцесс).

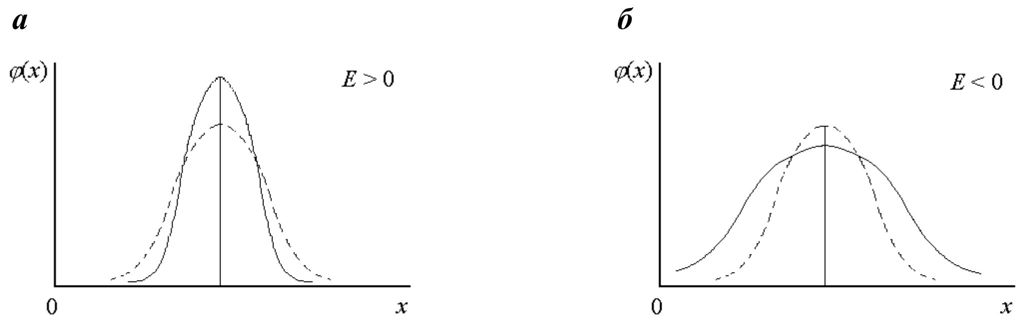


Рис. 2. Эксцесс распределения: положительный (*а*) и отрицательный (*б*)

В случае малых и больших объемов выборок показатель эксцесса вычисляется по следующим формулам (обозначения те же, что и для показателя асимметрии):

$$\boxed{\overline{E} = \left(\frac{1}{ns^4} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^4 \cdot n_i \right) - 3}, \qquad \overline{E} = \left(\frac{1}{ns^4} \sum_{j=1}^{m} \left(x_j - \overline{x} \right)^4 \cdot n_j \right) - 3.$$

Показатель эксцесса изменяется от –3 до +∞. За начало отсчета выпуклости распределений ($E = 0$) принимается значение показателя эксцесса нормального распределения.

Оценки параметров **равномерного распределения** $\varphi(x) = \dfrac{1}{b-a}$ ($x \in [a, b]$, $b > a$) вычисляются по формулам

$$\boxed{\begin{cases} a^* = \overline{x} - s\sqrt{3}; \\ b^* = \overline{x} + s\sqrt{3}. \end{cases}}$$

Здесь $\overline{x}$ – выборочное среднее, s – среднее квадратическое отклонение.

Статистической оценкой параметра λ **показательного распределения** $\varphi(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) служит величина, обратная среднему арифметическому: $\lambda^* = 1/\overline{x}$. Оценкой параметра λ **распределения Пуассона** $P(x_i) = \dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$ является среднее арифметическое: $\lambda^* = \overline{x}$.

§ 3. Интервальное оценивание

Интервальное оценивание позволяет определить некоторый интервал, который с той или иной степенью достоверности содержит истинное значение параметра генеральной совокупности.

Доверительные интервалы для **математического ожидания** находятся по формуле

$$\boxed{a = \overline{x} \pm \Delta x},$$

где $\overline{x}$ – выборочное среднее, Δx – доверительный интервал.

При построении доверительных интервалов необходимо учитывать как случайные факторы, приводящие к нестабильности результатов, так и инструментальную погрешность измерения:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{сл}\right)^2 + \left(\Delta x_{ин}\right)^2}.$$

Случайная погрешность измерения зависит от объема исследуемой выборки n и разброса полученных значений s:

$$\Delta x_{сл} = t_\alpha(df) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Коэффициенты доверия $t_\alpha(df)$ – критические значения распределения Стьюдента для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $df = n - 1$ (табл. II).

Инструментальная погрешность, связанная с неточным считыванием показаний прибора, принимается равной половине цены деления:

$$\Delta x_{ин} = \frac{\textit{цена деления шкалы}}{2}.$$

Доверительный интервал для **генеральной дисперсии**, содержащий параметр σ^2 с вероятностью $P = 1 - \alpha$, вычисляется следующим образом:

$$\boxed{s^2 \frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < s^2 \frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$$

или

$$\frac{SS}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{SS}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

где df – число степеней свободы, s^2 – выборочная дисперсия, SS – сумма квадратов, χ^2_α – критические значения распределения χ^2 (табл. III).

Границы доверительных интервалов для генерального **среднего квадратичного отклонения** σ находятся путем извлечения квадратного корня из значений доверительных границ для генеральной дисперсии.

Доверительные интервалы для **вероятности** вычисляются по формулам:

$$p_1 < p < p_2,$$

$$p_{2,1} = \frac{n}{z_{1-\alpha/2} + n}\left[w + \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{2n} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2n}\right)^2}\right],$$

где n – объем выборки, w – относительная частота, $z_{1-\alpha/2}$ – квантили нормированного распределения (табл. I).

Пример I.1. Получены результаты измерения времени реакции (в миллисекундах) 20 тревожных испытуемых на слуховой раздражитель: *434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477*. Требуется оценить характеристики центральной тенденции, рассеяния, асимметрии, эксцесса и рассчитать 95 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания и генеральной дисперсии. Точность измерения времени реакции равна 1 мс.

Решение. Составляем расчетную таблицу (табл. 2), в контрольную строку записываем суммы столбцов ‖, ‖, ~, ~, ~ и .

Таблица 2

Расчет оценок параметров распределения

x_i	n_i	$x_i\,n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2\,n_i$	$(x_i - \bar{x})^3\,n_i$	$(x_i - \bar{x})^4\,n_i$	$n_i \ln x_i$
‖	‖	‖		~	~	~	
434	1	434	-19	361	-6859	130321	6,073
436	1	436	-17	289	-4913	83521	6,078
443	1	443	-10	100	-1000	10000	6,094
445	2	890	-8	128	-1024	8192	12,196
446	1	446	-7	49	-343	2401	6,100
447	2	894	-6	72	-432	2592	12,205
448	1	448	-5	25	-125	625	6,105
451	1	451	-2	4	-8	16	6,111
452	1	452	-1	1	-1	1	6,114
453	1	453	0	0	0	0	6,116
456	1	456	3	9	27	81	6,122
458	2	916	5	50	250	1250	12,254
462	2	924	9	162	1458	13122	12,271
468	1	468	15	225	3375	50625	6,148
472	1	472	19	361	6859	130321	6,157
477	1	477	24	576	13824	331776	6,168
	n = 20	**9060**		**SS = 2412**	**11088**	**764844**	**122,312**

Выборочное **среднее арифметическое** находится путем деления контрольных строк столбцов ‖ и ‖ (сумма столбца ‖ представляет собой объем выборки n = 20):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{9060}{20} = 453{,}0 \text{ мс.}$$

Выборочная **медиана** есть середина вариационного ряда – среднее арифметическое десятого и одиннадцатого значений:

$$x_{0,5} = ½\,(x_{10} + x_{11}) = ½\,(451 + 452) = 451{,}5 \text{ мс.}$$

Выборочная **дисперсия** – результат деления SS (суммы столбца ~) на $df = n - 1$:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{SS}{df} = \frac{2412}{19} = 126{,}9 \text{ мс}^2.$$

Оценка **среднего квадратического отклонения** рассчитывается с учетом поправочного коэффициента c_n; для n = 20: c_{20} = 1,013.

$$s = c_n \cdot \sqrt{s^2} = 1{,}013 \cdot \sqrt{126{,}9} = 1{,}013 \cdot 11{,}26 = 11{,}41 \text{ мс.}$$

Выборочный **коэффициент вариации** равен:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{11{,}41}{453{,}0} = 0{,}025 = 2{,}5\ \%.$$

95 %-ные доверительные интервалы для **математического ожидания** определяются по формуле: $a = \bar{x} \pm \Delta x$, где $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{сл})^2 + (\Delta x_{ин})^2}$. Случайная ошибка равна:

$$\Delta x_{сл} = t_\alpha(df)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}093\cdot\frac{11{,}41}{\sqrt{20}} = 5{,}340 \text{ мс.}$$

Значение коэффициента Стьюдента $t_{0,05}(19) = 2{,}093$ берется из таблицы II для уровня значимости $\alpha = 1 - P = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ и числа степеней свободы $df = n - 1 = 19$. Инструментальная ошибка равна 0,5 мс – половине шкалы деления прибора; ею можно пренебречь ввиду того, что она меньше случайной ошибки более чем в 10 раз. Итак, доверительный интервал для математического ожидания равен

$$a = (453{,}0 \pm 5{,}3) \text{ мс}, \ \alpha = 0{,}05.$$

Доверительный интервал для **генеральной дисперсии** рассчитывается по формуле

$$\frac{SS}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{SS}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

в которой учтено, что сумма квадратов SS (сумма столбца ~) равна произведению дисперсии на число степеней свободы: $SS = s^2 \cdot df$. Критические значения χ^2 берутся в таблице распределения «хи-квадрат» (табл. III) для уровней значимости $\alpha/2 = 0{,}025$ и $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и числа степеней свободы $df = n - 1 = 19$:

$$\frac{2412}{32{,}852} < \sigma^2 < \frac{2412}{8{,}907};$$

$$73{,}42 < \sigma^2 < 270{,}80 \text{ мс}^2, \ \alpha = 0{,}05.$$

Доверительный интервал для **генерального среднего квадратического отклонения** находится путем извлечения квадратного корня из обоих концов интервала:

$$8{,}57 < \sigma < 16{,}46 \text{ мс}, \ \alpha = 0{,}05.$$

Для вычисления выборочных показателей **асимметрии и эксцесса** используем значения контрольных строк ⁀ и ⁀:

$$\overline{A} = \frac{1}{ns^3}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^3 \cdot n_i = \frac{11088}{20\cdot(11{,}41)^3} = 0{,}373.$$

$$\overline{E} = \left(\frac{1}{ns^4}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^4 \cdot n_i\right) - 3 = \frac{764844}{20\cdot(126{,}9)^2} - 3 = -0{,}625.$$

Выборочное **среднее геометрическое** $\overline{x}_G$ находится путем нахождения экспоненты от частного контрольных строк столбцов и ‖ (объема выборки n):

$$\overline{x}_G = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot \ln x_i)\right) = \exp\left(\frac{122{,}312}{20}\right) = 452{,}9 \text{ мс.}$$

§ 4. Точность результатов измерений

Следует отчетливо представлять себе, что ни одно измерение не может быть выполнено абсолютно точно: результаты всех измерений, как прямых, так и косвенных, производятся с ошибками (погрешностями), поэтому они всегда представлены не точными, а приближенными числами.

При обработке результатов измерений необходимо помнить, что завышать или занижать точность косвенных измерений за счет завышения или занижения точности вычислений нельзя. Завышение точности вычислений (получение результата с бóльшим, чем следует, числом значащих цифр) создает ложное впечатление о большей точности измерений.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля. Например, число 0,03 содержит одну значащую цифру, 0,25 – две, 3260 – четыре, $3{,}26 \cdot 10^3$ – три, а число 5200,00 – шесть. Известно, что для точных чисел нуль на конце десятичной дроби не имеет значения, поэтому он может быть отброшен. В приближенном же числе нуль на конце десятичной дроби не является пустой формальностью: он свидетельствует о точности произведенной операции. Запись приближенного числа в виде 3,6 и 3,60 не одно и то же. Второе число означает, что десятые доли известны точно (6), а сотые и тысячные являются результатом округления чисел 3,595 3,596 … 3,603 3,604. В первом числе (3,6) уже десятые доли измерены не точно, а, возможно, представляют собой результат округления.

Нуль на конце целого приближенного числа может быть также получен в результате округления. Например, число 250 может быть получено в результате округления чисел 246, 247, … 253 или 254. Чтобы не путать приближенные и точные числа, приближенные числа записывают в экспоненциальной форме: $249 \approx 2{,}5 \cdot 10^2$. Число 2602 после округления следует писать не 2600, а $2{,}60 \cdot 10^3$.

Действия над приближенными числами выполняются в соответствии со следующими **правилами**.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном числе с наименьшим количеством десятичных знаков:

$$3{,}68 + 2{,}579 + 6{,}0 = 12{,}259 \approx 12{,}3.$$

2. При умножении и делении приближенных чисел следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеется в числе с наименьшим числом значащих цифр:

$$3294 \cdot 52 = 171288 \approx 1{,}7 \cdot 10^5;$$
$$3294 : 52 = 63{,}3462 \approx 6{,}3 \cdot 10;$$
$$527 \cdot 139 = 73253 \approx 7{,}33 \cdot 10^4;$$
$$527 : 139 = 3{,}79137 \approx 3{,}79.$$

3. При проведении промежуточных вычислений для того, чтобы к погрешностям измерений не прибавлять погрешности округления, в каждом промежуточном результате следует оставлять на одну значащую цифру больше, чем требуется по правилам.

§ 5. Статистическая проверка гипотез

В эмпирических исследованиях подвергается проверке некоторое предположение относительно свойств одной или нескольких генеральных совокупностей (о виде распределения или о его параметрах). Это предположение носит название *статистической гипотезы*. Статистические гипотезы подразделяются на *нулевые* и *альтернативные*.

Нулевая гипотеза h_0 – гипотеза об отсутствии различий между изучаемыми признаками – имеет наиболее важное значение. Нулевая гипотеза – это то, что психолог-исследователь хочет опровергнуть, если перед ним стоит задача доказать значимость различий. Нулевую гипотезу выдвигают и затем проверяют с помощью статистических критериев с целью выявления оснований для ее отклонения и для принятия *альтернативной гипотезы* h_1 – гипотезы о значимости различий. Другими словами, альтернативная гипотеза – это то, что психолог хочет доказать.

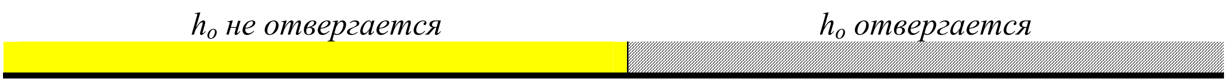
В отношении нулевой гипотезы принимается только два статистических решения – отвергнуть или не отвергнуть. Никогда не бывает решения принять нулевую гипотезу. Если имеющийся статистический материал не позволяет отвергнуть нулевую гипотезу, то ее используют в качестве рабочей гипотезы до тех пор, пока новые эмпирические данные не позволят ее отклонить. Основанием для такого подхода является невозможность в любом эмпирическом исследовании доказать гипотезу. Самое большое, что исследователь может сделать – это показать, что альтернативные объяснения неправильны, то есть нулевая гипотеза неверна.

Следует отметить, что в психологической практике встречаются также задачи, в которых необходимо доказать незначимость различий изучаемого признака, то есть «подтвердить» нулевую гипотезу. Например, если нужно убедиться, что разные испытуемые получают хотя и различные, но уравновешенные по трудности задания, или что экспериментальная и контрольная выборки не различаются между собой по каким-то значимым характеристикам.

Для проверки нулевой гипотезы используется специально подобранная случайная величина с известным законом распределения – *статистический критерий*. Проверка правильности нулевой гипотезы называется *проверкой на значимость* (проверкой на статистическую значимость). Когда эмпирические данные свидетельствуют о том, что нулевая гипотеза может быть отвергнута, то говорят, что различие статистически значимо; когда же она на основании эмпирических данных не может быть отвергнута, то говорят, что различие статистически не значимо.

Нулевая гипотеза отвергается тогда, когда на основании выборочных данных получается маловероятный результат для случая ее истинности. Границей между высокой и малой вероятностью служат *уровни значимости* $\alpha = 1 - P$, где P – надежность.

Значения статистического критерия, при которых для выбранного уровня значимости α отвергается нулевая гипотеза, образуют *критическую область критерия,* а значения, при которых нулевая гипотеза не отвергается, – *область допустимых значений* (рис. 3).



Область допустимых значений (верна h_0) Критическая область (верна h_1)

Рис. 3. Критические области критерия

Таким образом, статистическая проверка гипотез заключается в построении критической области критерия для выбранного уровня значимости α: если эмпирическое значение критерия попадает в критическую область, нулевая гипотеза может быть отвергнута и верной считается альтернативная гипотеза.

Поскольку эмпирические исследования в психологии всегда содержат много случайных факторов, необходимо смириться с тем, что некоторые из принимаемых статистических решений относительно нулевой гипотезы окажутся ошибочными (при статистической проверке гипотез возможны четыре исхода, из которых только два являются верными):

Таблица 3

Исходы при проверке статистических гипотез

Решение	*h_o верна*	*h_o неверна*
h_0 отвергается	Ошибка I рода	Правильное решение
h_0 не отвергается	Правильное решение	Ошибка II рода

Ошибка I рода заключается в отбрасывании верной нулевой гипотезы: исследователь делает ошибочный вывод о значимости различий, в то время, когда на самом деле их нет. Вероятность ошибки I рода определяется *уровнем значимости α*. Чем больше α–уровень, тем меньше надежность результатов исследования $P = 1 - \alpha$ и тем выше риск неправильно «доказать» экспериментальную гипотезу. Поэтому уровень значимости α в психологических исследованиях не может быть большим (больше 5 %).

Ошибка II рода заключается в обратном – в принятии неверной нулевой гипотезы. Вероятность ошибки II рода называется *уровнем значимости β*, для любого эксперимента эта вероятность увеличивается с уменьшением α (рис. 4). Другими словами, риск совершить ошибку II рода (согласиться с тем, что результаты исследования не подтверждают гипотезу) увеличивается при использовании очень строгого критерия ($\alpha < 0{,}01$).

Из рисунка 4 видно, что с увеличением α-уровня уменьшается надежность данных P, что увеличивает риск неправильного «доказательства» выдвинутой гипотезы. При уменьшении же α-уровня после определенного предела эмпирические данные перестают подтверждать выдвинутую гипотезу (увеличивается как надежность P, так и β-уровень).

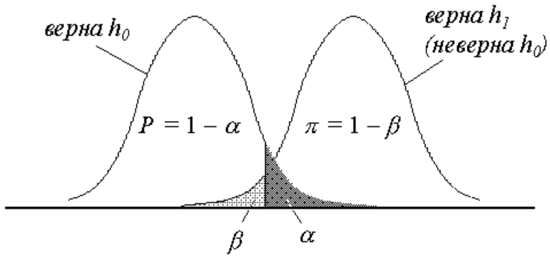


Рис. 4. Вероятность ошибок I и II рода

В силу этого уровень значимости α не может быть равен нулю, обычно его полагают равным не менее 1 %, хотя в некоторых случаях проводятся исследования с α = 0,1 %.

В психологических исследованиях низшим уровнем статистической значимости принято считать 5 %-й уровень (α = 0,05), а достаточным – 1 %-й уровень значимости (α = 0,01). Исследования с уровнем значимости больше 5 % обладают низкой надежностью (то есть бесполезны); в исследованиях с очень строгим α (менее 1 %) «доказать» что-либо практически невозможно.

Так как исследователь до проведения эксперимента не может определить точное значение уровня значимости α (известен лишь интервал, в котором этот уровень заключен: от 0,01 до 0,05), между областью допустимых значений и критической областью появляется еще одна область, риск совершить ошибку I или II рода в которой очень велик. Она называется *областью неопределенности*. Если эмпирическое значение критерия попадает в эту область, решение относительно нулевой гипотезы h_0 не принимается. Границами области неопределенности в психологических исследованиях являются критические значения критерия, вычисленные для уровней значимости α = 0,05 и 0,01 (рис. 5).

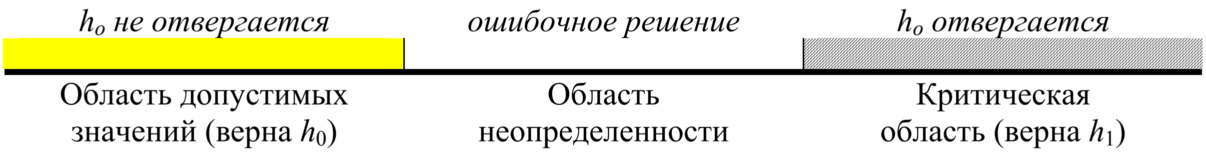


Рис. 5. Правило статистического решения

С ошибкой II рода связано понятие *мощности критерия* π

$$\pi = 1 - \beta.$$

Мощность критерия – это способность критерия выявлять различия, если они есть, то есть способность критерия отклонить неверную нулевую гипотезу и, таким образом, не допустить ошибку II рода (см. рис. 4).

Статистические критерии делятся на *параметрические* и *непараметрические*. Параметрические критерии включают в формулу расчета параметры распределения (математическое ожидание, дисперсию и др.) и поэтому могут быть использованы только в случае интервальных или реляционных измерений, то есть, если изучаемый признак распределен нормально. Эти критерии позволяют прямо оценить различия в средних значениях (критерий Стьюдента), дисперсиях (критерии Фишера, Бартлета, Кочрена и Хартлея), выявить тенденции изменения признака при переходе от одного условия к другому (однофакторный дисперсионный анализ) и оценить взаимодействие двух и более факторов в их влиянии на изменения признака (многофакторный дисперсионный анализ).

Непараметрические критерии не используют информацию о виде функции распределения случайной величины. Они основаны на оперировании только частотами или рангами. Эти критерии являются менее мощными, чем параметрические и не всегда позволяют выявить различия там, где параметрические критерии способны это сделать. Как правило, непараметрические критерии позволяют оценить лишь средние тенденции изменения признака, тем не менее, в случае порядковых (ранжирование) или номинативных измерений (классификация) использование чувствительных параметрических критериев приводит к значительно более грубым ошибкам по сравнению с неточностями, даваемыми непараметрическими критериями. Поэтому выбор статистического критерия должен быть адекватным поставленной задаче: необходимо учитывать тип шкалы измерения (интервальная или порядковая), мощность критерия, количество сравниваемых групп, возможность его применения к неравным по объему выборкам, а также информативность результатов.

Выбор критерия для сравнения характеристик **центральной тенденции** и **рассеяния** зависит от типа измерительной шкалы и числа исследуемых выборок m.

Таблица 4

Статистические критерии для сравнения характеристик центральной тенденции

Интервальная или реляционная шкалы (нормальное распределение)		*Порядковая, интервальная или реляционная шкалы (любое распределение)*	
$m = 2$	$m > 2$	$m = 2$	$m > 2$
Критерий Стьюдента	Однофакторный дисперсионный анализ	Критерии Манна–Уитни, МакНемара	Критерий Краскела–Уоллиса

Для сравнения **медиан** служит критерий знаков МакНемара.

Таблица 5

Статистические критерии для сравнения характеристик рассеяния

Интервальная или реляционная шкалы		*Порядковая, интервальная или реляционная шкалы*	
$m = 2$	$m > 2$	$m = 2$	$m > 2$
Критерий Фишера	Критерии Бартлета, Кочрена, Хартлея	Критерий Сиджела–Тьюки	–

Для **отбрасывания резко выделяющихся результатов** используется критерий Смирнова.

Для сравнения **распределений** между собой (эмпирического и теоретического или нескольких эмпирических) используются *критерии согласия*: критерий Пирсона χ^2 («хи–квадрат»), критерий λ Колмогорова–Смирнова, критерий ω^2 Андерсона–Дарлинга, критерий W Шапиро–Уилка. Используется также приближенный критерий нормальности – неравенства Чéбышева.

II. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОТБРАСЫВАНИЯ РЕЗКО ВЫДЕЛЯЮЩИХСЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

§ 6. Критерий Смирнова

Назначение. Критерий Н.В. Смирнова позволяет исключить из рассмотрения сомнительные результаты, полученные вследствие ошибочных измерений. Рассеяние эмпирических данных может быть обусловлено не только изучаемыми свойствами испытуемых, но и изменением условий измерения и ошибками измерений. Если указанные отклонения отмечаются в процессе проведения эксперимента, они, разумеется, сразу же исключаются из дальнейшего рассмотрения. Однако не всегда причина резких отклонений результатов может быть обнаружена вовремя. В подобных случаях сомнительные результаты отдельных испытуемых исключают путем применения специальных критериев.

Ограничение: изучаемый признак должен быть измерен в **сильной шкале**.

Описание критерия. Критерий Смирнова действителен для случая, когда генеральные параметры неизвестны, а известны лишь их оценки, произведенные на основании анализируемой выборки объема n: выборочное среднее значение $\bar{x}$ и среднее квадратическое отклонение s.

Нулевой гипотезой h_0 является предположение о том, что сомнительное значение (наибольшее x_n или наименьшее x_1) принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные $(n-1)$ значения.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что сомнительное значение определяется грубыми ошибками измерения.

Схема вычислений. Выборочные результаты располагают в виде вариационного ряда, затем подсчитываются среднее арифметическое $\bar{x}$ и среднее квадратическое отклонение s (с учетом поправки c_n).

Статистикой критерия Смирнова является случайная величина:

$$\boxed{u_i = \frac{|x_i - \bar{x}|}{s}},$$

где x_i – сомнительное значение (обычно первый или последний член вариационного ряда). Вычисленная статистика u_i сопоставляется с критическим значением критерия Смирнова $u_\alpha(df)$, найденным в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $df = n - 1$ (табл. 6). При $n > 25$ используют критические значения критерия Стьюдента.

Таблица 6

Критические значения критерия Смирнова

df	***α***		***df***	***α***	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**
2	1,15	1,15	**14**	**2,41**	**2,70**
3	1,46	1,49	15	2,44	2,75
4	**1,67**	**1,75**	16	2,48	2,78
5	1,82	1,94	17	2,50	2,82
6	1,94	2,10	18	2,53	2,85
7	2,03	2,22	**19**	**2,56**	**2,88**
8	2,11	2,32	20	2,58	2,91
9	**2,18**	**2,41**	21	2,60	2,94
10	2,23	2,48	22	2,62	2,96
11	2,29	2,55	23	2,64	2,99
12	2,33	2,61	**24**	**2,66**	**3,01**
13	2,37	2,66	**При $df > 24$ $u_\alpha(df) = t_\alpha(df)$**		

Если эмпирическое значение критерия попадает в область допустимых значений, то есть если выполняется неравенство

$$u_i \le u_{0,05}(df),$$

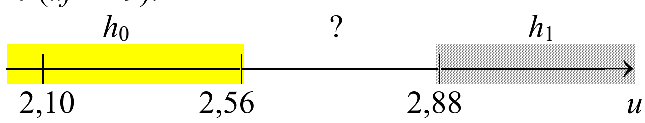
нулевая гипотеза не отвергается, то есть сомнительный результат не следует считать резко выделяющимся, и он должен учитываться, как и остальные $(n - 1)$ результаты. Если же эмпирическое значение критерия попадает в критическую область, то есть если выполняется неравенство $u_i > u_{0,01}(df)$, нулевая гипотеза отклоняется. Сомнительный результат, скорее всего, определяется грубыми ошибками измерения и должен быть исключен из рассмотрения, а найденные ранее оценки $\bar{x}$ и s должны быть подвергнуты корректировке с учетом изменения объема выборки.

Пример II.1. По результатам примера I.1 требуется проверить нулевую гипотезу о принадлежности последнего члена вариационного ряда $x_{20} = 477$ мс той же генеральной совокупности, что и остальные девятнадцать в предположении, что изучаемая характеристика имеет нормальное распределение.

Решение. Для проверки нулевой гипотезы используем критерий Смирнова, значения среднего арифметического и среднего квадратического отклонения возьмем из примера I.1. Эмпирическое значение

$$u_{20} = \frac{|x_{20} - \bar{x}|}{s} = \frac{|477 - 453{,}0|}{11{,}41} = 2{,}10$$

сопоставляем с критическими значениями $u_{0,05} = 2{,}56$ и $u_{0,01} = 2{,}88$, найденными для объема выборки $n = 20$ $(df = 19)$:



Эмпирическое значение $u_{20} = 2{,}10$ попадает в область допустимых значений критерия, следовательно, нулевая гипотеза не отвергается, а результат 477 мс не является следствием грубой ошибки измерения.

III. КРИТЕРИИ СРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ

А. КРИТЕРИИ ДЛЯ ДВУХ ВЫБОРОК

§ 7. Критерий Фишера

Назначение. Параметрический критерий Фишера позволяет сравнить две выборочные дисперсии в случае, если исследуемая характеристика измерена в сильной шкале.

Ограничение: изучаемый признак должен быть измерен в **сильной шкале**.

Если вид распределения неизвестен или проводились порядковые измерения, результаты могут оказаться ошибочными, в этом случае необходимо использовать непараметрический критерий Сиджела–Тьюки.

Описание критерия. Из двух генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2. По результатам исследования подсчитаны оценки дисперсий s_1^2 и s_2^2. Требуется сравнить генеральные дисперсии.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с одинаковыми генеральными дисперсиями: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с разными дисперсиями: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Статистика критерия. Для проверки нулевой гипотезы вычисляется случайная величина F – **отношение бóльшей выборочной дисперсии к меньшей**:

$$\boxed{F = \frac{s_Б^2}{s_М^2}},$$

которая сравнивается с критическим значением распределения Фишера $F_\alpha(df_1, df_2)$ для вероятности $P = 1 - \alpha$ и чисел степеней свободы

$$df_1 = n_Б - 1; \quad df_2 = n_М - 1.$$

На первом месте в $F_\alpha(df_1, df_2)$ всегда стоит число степеней свободы для бóльшей выборочной дисперсии!

Если эмпирическое значение F попадает в область допустимых значений критерия Фишера, то есть если выполняется условие

$$F \le F_{\alpha}(df_1, df_2),$$

то нулевая гипотеза о равенстве двух генеральных дисперсий не отвергается. В этом случае обе выборки могут быть объединены в одну, и по двум выборочным дисперсиям можно оценить генеральную дисперсию σ^2

$$s^2 = \frac{df_1 \cdot s_1^2 + df_2 \cdot s_2^2}{df_1 + df_2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

которая затем может быть использована для построения доверительных интервалов:

$$s^2 \frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < s^2 \frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

где $df = df_1 + df_2 = n_1 + n_2 - 2$ – число степеней свободы, χ^2 – критические значения распределения Пирсона «хи–квадрат» для уровней значимости $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ находится по статистическим таблицам.

Если эмпирическое значение критерия попадает в критическую область критерия, то есть если $F > F_{\alpha}(df_1, df_2)$, нулевая гипотеза отвергается, принимается альтернативная.

Пример III.1. Исследование познавательной активности 30 учащихся средней школы и 20 учащихся гуманитарного лицея показало, что ее средний уровень равен 401 и 409, а дисперсия – 71 и 82 соответственно в обоих учебных заведениях. Предполагая, что уровень познавательной активности в популяции имеет нормальный закон распределения, требуется проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий познавательной активности учащихся школы и лицея h_0: $\sigma^2_{\text{ш}} = \sigma^2_{\text{л}} = \sigma^2$.

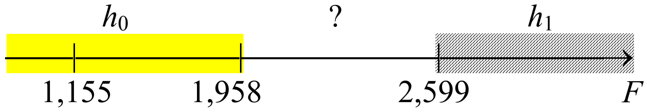
Решение. Предположение о нормальном законе распределения познавательной активности в популяции позволяет использовать критерий Фишера для проверки нулевой гипотезы.

Эмпирическое значение критерия – отношение бóльшей выборочной дисперсии (у учащихся гуманитарного лицея) к меньшей:

$$F = \frac{s^2_{\text{л}}}{s^2_{\text{ш}}} = \frac{82}{71} = 1{,}155.$$

Критические значения $F_{\alpha}(df_{\text{л}}, df_{\text{ш}})$ определяем по статистическим таблицам распределения Фишера. На первое место ставим число степеней свободы для выборки с большей дисперсией – это учащиеся гуманитарного лицея ($df = 19$), а не средней школы ($df = 29$):

$$F_{0,05}(19, 29) = 1{,}958; \qquad F_{0,01}(19, 29) = 2{,}599.$$



Сопоставив эмпирическое и критические значения, обнаруживаем, что эмпирическое значение статистики попадает в область допустимых значений, следовательно, нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий не отвергается, а разброс познавательной активности школьников обоих учебных заведений обусловлен случайными причинами. Вследствие однородности обе выборки учащихся могут быть объединены в одну. Оценка генеральной дисперсии σ^2 равна

$$s^2 = \frac{df_{л} \cdot s_{л}^2 + df_{ш} \cdot s_{ш}^2}{df_{л} + df_{ш}} = \frac{19 \cdot 82 + 29 \cdot 71}{19 + 29} = 75{,}4\,.$$

Вычислим 95 %-й доверительный интервал для генеральной дисперсии:

$$s^2 \frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < s^2 \frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\,;$$

$$75{,}4 \cdot \frac{48}{69{,}023} < \sigma^2 < 75{,}4 \cdot \frac{48}{30{,}754}\,;$$

$$52{,}43 < \sigma^2 < 117{,}68\,; \quad \alpha = 0{,}05.$$

Критические значения критерия Пирсона χ^2 найдены в статистических таблицах распределения «хи–квадрат» для уровней значимости $\alpha/2 = 0{,}025$ и $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и числа степеней свободы $df = 19 + 29 = 48$.

§ 8. Критерий Сиджела–Тьюки

Назначение. Ранговый критерий рассеяния Сиджела–Тьюки является непараметрическим аналогом критерия Фишера и позволяет сравнить две выборки в случае, если изучаемый признак измерен в **порядковой шкале** или информация о законе распределения исследуемой характеристики в популяции отсутствует.

Критерием Сиджела–Тьюки можно пользоваться, если изучаемая характеристика измерена в **сильной шкале**, однако в этом случае предпочтительнее использовать критерий Фишера.

Ограничения:

1) должно соблюдаться **равенство медиан** сравниваемых генеральных совокупностей, что должно быть предварительно подвергнуто проверке на основании критерия знаков;

2) объем каждой выборки должен быть не меньше десяти: $n_i \geq 10$.

Описание критерия. Из двух генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2. В результате исследования получены числовые значения изучаемого показателя в первой и во второй выборках. Требуется сравнить рассеяние показателей обеих выборок.

Нулевая гипотеза h_0 заключается в равенстве показателей рассеяния обеих генеральных совокупностей.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные генеральные совокупности имеют неодинаковые показатели рассеяния.

Схема вычислений. Обе выборки объединяются в единый вариационный ряд с отметкой принадлежности каждого члена ряда к соответствующей выборке и производится ранжирование членов ряда. Экстремальные члены вариационного ряда (самые большие и самые малые значения) получают меньшие ранговые значения, а средние члены общего вариационного ряда – наивысшие ранги:

– ранг 1 приписывают минимальному члену ряда,

– ранг 2 – максимальному,
– ранг 3 – предыдущему наибольшему значению ряда;
– ранг 4 приписывается второму по малости члену ряда;
– ранг 5 приписывается третьему по малости члену ряда и т.д.

Одинаковым значениям вариационного ряда присваиваются одинаковые ранги, равные среднему арифметическому.

Далее подсчитываются суммы рангов каждой выборки R_1 и R_2. В качестве проверки правильности вычислений используется соотношение

$$R_1 + R_2 = ½ (n_1 + n_2) (n_1 + n_2 + 1).$$

Статистикой критерия является величина:

$$\boxed{z = \frac{\left|R - \frac{1}{2} n_м (n_м + n_б + 1)\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12} n_м n_б (n_м + n_б + 1)}}}.$$

Индексом $м$ обозначена выборка **меньшего объема**, R – ее ранговая сумма. В случае равенства объемов выборок за R принимают наименьшую из двух сумм рангов. Данная случайная величина обладает симметричным распределением с математическим ожиданием $M(R) = \dfrac{1}{2}\, n_м\, (n_м + n_б + 1)$ и дисперсией $\sigma^2(R) = \dfrac{1}{12}\, n_м n_б\, (n_м + n_б + 1)$, поэтому распределение нормированной величины z уже при $n > 9$ удовлетворительно описывается нормальным законом.

Проверка нулевой гипотезы о равенстве показателей рассеяния осуществляется путем сравнения вычисленной величины z с квантилями нормального распределения $z_{1-\alpha/2}$ (для $\alpha = 0{,}05$ находим $z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1{,}960$; для $\alpha = 0{,}01$: $z_{1-\alpha/2} = z_{0,995} = 2{,}576$).

При попадании эмпирического значения z в область допустимых значений ($z \le z_{0,975} = 1{,}960$), нулевая гипотеза о равенстве показателей рассеяния исследуемых генеральных совокупностей не отвергается.

Если же эмпирическое значение z попадает в критическую область ($z > z_{0,995} = 2{,}576$), верной считается альтернативная гипотеза.

Пример III.2. 20 участников психотерапевтической группы «Последняя надежда» в течение месяца строго выполняли рекомендации терапевта для того, чтобы хоть немного похудеть. Результаты их усилий в кг приведены ниже:

Мужчины: 1,17 1,39 1,60 2,53 2,74 3,18 3,91 4,06 4,47 7,92 (кг).
Женщины: 1,60 1,65 2,07 2,86 3,85 3,92 3,99 4,78 5,22 6,76 (кг).

Требуется проверить гипотезу об однородности психотерапевтического воздействия на мужчин и на женщин (гипотезу о равенстве характеристик рассеяния). Информация о законе распределения скорости похудения в популяции отсутствует, однако известно, что гендерных различий по этой характеристике нет.

Решение. Нулевой гипотезой h_0 является предположение о равенстве показателей рассеяния скорости похудения мужчин и женщин. Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что генеральные совокупности, из которых выделены мужская и женская выборки, имеют различные показатели рассеяния.

Отсутствие информации о законе распределения скорости похудения в популяции не позволяет использовать критерий Фишера для проверки нулевой гипотезы. С этой целью необходимо использовать критерий Сиджела–Тьюки. Оба ограничения критерия выполняются: 1) равенство медиан мужской и женской частей популяции соблюдается вследствие отсутствия гендерных различий; 2) объемы выборок $n_i \geq 10$.

Обе выборки объединяем в единый вариационный ряд (табл. 7) и производим ранжирование членов этого ряда по специальному правилу. Одинаковым значениям вариационного ряда 1,60 присваиваем одинаковые ранги 6,5, равные среднему арифметическому рангов 5 и 8.

Далее подсчитываем суммы рангов выборок, и в качестве проверки правильности вычислений используем соотношение

$$R_м + R_ж = ½\,(n_м + n_ж)\,(n_м + n_ж + 1):$$

Таблица 7

Ранжирование вариационного ряда

x_i	*Выборка*	*Ранги*
1,17	*м*	1
1,39	*м*	4
1,60	*м*	6,5 (5)
1,60	*ж*	6,5 (8)
1,65	*ж*	9
2,07	*ж*	12
2,53	*м*	13
2,74	*м*	16
2,86	*ж*	17
3,18	*м*	20
3,85	*ж*	19
3,91	*м*	18
3,92	*ж*	15
3,99	*ж*	14
4,06	*м*	11
4,47	*м*	10
4,78	*ж*	7
5,22	*ж*	6
6,76	*ж*	3
7,92	*м*	2

$$R_м = 1 + 4 + 6{,}5 + 13 + 16 + 20 + 18 + 11 + 10 + 2 = 101{,}5;$$
$$R_ж = 6{,}5 + 9 + 12 + 17 + 19 + 15 + 14 + 7 + 6 + 3 = 108{,}5;$$
$$R_м + R_ж = 101{,}5 + 108{,}5 = 210;$$
$$½\,(n_м + n_ж)\,(n_м + n_ж + 1) = ½\,(10 + 10)\,(10 + 10 + 1) = 210.$$

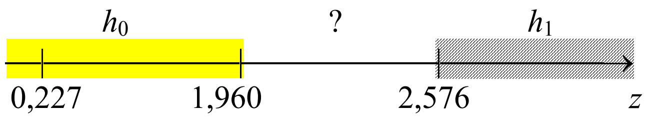
Учитывая равенство объемов выборок, за R принимаем меньшую из ранговых сумм:

$$R = \min\,(R_м, R_ж) = 101{,}5.$$

Эмпирическое значение критерия Сиджела–Тьюки равно:

$$z = \frac{|101{,}5 - 0{,}5 \cdot 10 \cdot 21| - 0{,}5}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 21}} = 0{,}227\,.$$

Критическими значениями критерия являются квантили нормального распределения $z_{0,975} = 1{,}960$ и $z_{0,995} = 2{,}576$:



Вследствие того, что эмпирическое значение критерия Сиджела–Тьюки попадает в его область допустимых значений, нулевую гипотезу о равенстве показателей рассеяния скорости похудения мужчин и женщин отвергнуть нет основания.

Б. КРИТЕРИИ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ВЫБОРОК

§ 9. Критерий Бартлета

Назначение. Параметрический критерий Бартлета позволяет сравнить несколько выборочных дисперсий в случае, если исследуемая характеристика измерена в сильной шкале.

Ограничения:

1) изучаемый признак должен быть измерен в **сильной шкале**;

2) объем каждой выборки должен быть больше четырех: $n_i > 4$.

Описание критерия. Из m нормально распределенных генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_i ($i = 1$–m). По результатам исследования подсчитаны оценки дисперсий s_i^2. Требуется сравнить эти дисперсии.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с одинаковыми генеральными дисперсиями: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с разными дисперсиями.

Статистикой критерия Бартлета является случайная величина B:

$$\boxed{B = \frac{V}{C}},$$

$$V = 2{,}3026\left(df \cdot \lg s^2 - \sum_{i=1}^{m} df_i \cdot \lg s_i^2 \right);$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{df_i} - \frac{1}{df} \right).$$

Здесь: $df_i = n_i - 1$ – число степеней свободы i–й выборки, df – сумма чисел степеней свободы:

$$df = \sum_{i=1}^{m} df_i = \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \right) - m = N - m,$$

$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ – общее количество всех исследуемых испытуемых (сумма объемов выборок), m – количество выборок, s_i^2 – выборочные дисперсии, s^2 – среднее арифметическое выборочных дисперсий, взвешенное по числам степеней свободы:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} df_i \cdot s_i^2}{df} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot s_i^2}{N - m}.$$

Эмпирическое значение B сравнивается с критическим значением распределения «хи–квадрат» $\chi_\alpha^2(m-1)$, найденным для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $df = m - 1$. Если B попадает в область допустимых значений критерия χ^2, то есть если выполняется условие

$$B \le \chi_\alpha^2(m - 1),$$

нулевая гипотеза о равенстве всех генеральных дисперсий не отвергается. Оценкой генеральной дисперсии σ^2 является величина s^2, которая может быть использована для построения доверительных интервалов

$$s^2 \frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < s^2 \frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}},$$

где число степеней свободы равно $df = N - m$; критические значения распределения Пирсона χ^2 находятся для уровней значимости $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ и числа степеней свободы df.

В случае, когда эмпирическое значение B попадает в критическую область критерия, то есть когда $B > \chi_\alpha^2(m - 1)$, нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий отвергается и принимается альтернативная.

Замечания. 1. Не следует торопиться вычислять константу C! Сначала надо найти величину V и сравнить с критическим значением $\chi_\alpha^2(m - 1)$. Если V попадает в область допустимых значений, то есть если выполняется условие $V \le \chi_\alpha^2(m - 1)$, то и B также попадет в область допустимых значений, т.к. $C > 1$. Если же окажется, что $V > \chi_\alpha^2(m - 1)$, надо вычислить C, найти B и сравнить его с критическим значением $\chi_\alpha^2(m - 1)$.

2. Если объемы всех выборок одинаковые, предпочтительнее пользоваться критериями Хартлея или Кочрена.

Пример III.3. По трем независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$, $n_2 = 13$ и $n_3 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные дисперсии, соответственно равные 3,2; 3,8 и 6,3. Требуется проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2$.

Решение. Вследствие того, что исследуемая характеристика нормально распределена в популяции, для проверки нулевой гипотезы используем критерий Бартлета. Эмпирическое значение критерия находим по формуле $B = \frac{V}{C}$ (знаменатель C вычислять не торопимся). Для расчета числителя V составляем расчетную таблицу (табл. 8).

Таблица 8

Расчет эмпирического значения B

i	s_i^2	n_i	df_i	$1/df_i$	$df_i\ s_i^2$	$\lg s_i^2$	$df_i \lg s_i^2$
1	3,2	9	8	0,125	25,6	0,5051	4,0408
2	3,8	13	12	0,083	45,6	0,5798	6,9576
3	6,3	15	14	0,071	88,2	0,7993	11,1902
		37	**34**	**0,279**	**159,4**		**22,1886**

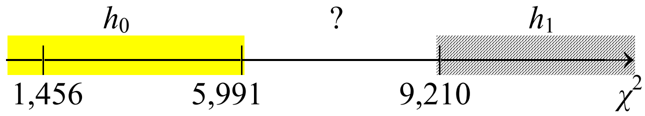
Используя суммы шестого и четвертого столбцов, найдем s^2 и $\lg s^2$:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} df_i \cdot s_i^2}{df} = \frac{159{,}4}{34} = 4{,}69; \qquad \lg s^2 = \lg 4{,}69 = 0{,}6712.$$

Числитель V эмпирического значения критерия Бартлета равен:

$$V = 2{,}3026\left(df \cdot \lg s^2 - \sum_{i=1}^{m} df_i \cdot \lg s_i^2\right) = 2{,}3026 \cdot (34 \cdot 0{,}6712 - 22{,}1886) = 1{,}4557.$$

Критические значения критерия χ^2 определяем по статистическим таблицам для числа степеней свободы $m - 1 = 3 - 1 = 2$: $\chi^2_{0,05}(2) = 5{,}991$; $\chi^2_{0,01}(2) = 9{,}210$ и отмечаем их на диаграмме:



Так как V попадает в область допустимых значений критерия «хи–квадрат», то и B окажется в этой же области (поскольку $C > 1$). Таким образом, отвергнуть нулевую гипотезу об однородности трех дисперсий нет оснований, следовательно, выборочные дисперсии различаются незначимо.

Вычислим 95 %-й доверительный интервал для генеральной дисперсии:

$$s^2 \frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < s^2 \frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}};$$

$$4{,}69 \cdot \frac{34}{51{,}966} < \sigma^2 < 4{,}69 \cdot \frac{34}{19{,}806};$$

$$3{,}07 < \sigma^2 < 8{,}05, \quad \alpha = 0{,}05.$$

Критические значения критерия Пирсона χ^2 найдены в статистических таблицах распределения «хи–квадрат» для уровней значимости $\alpha/2 = 0{,}025$ и $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и числа степеней свободы $df = 34$.

§ 10. Критерий Хартлея

Назначение. Параметрический критерий Хартлея позволяет сравнить несколько выборочных дисперсий, рассчитанных по выборкам одинакового объема, в случае, если исследуемая характеристика измерена в сильной шкале.

Ограничения:

1) изучаемый признак должен быть измерен в **сильной шкале**;

2) объемы всех исследуемых выборок должны быть одинаковыми: $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = n$.

Описание критерия. Из m нормально распределенных генеральных совокупностей извлечены независимые выборки одинаковых объемов n. По результатам исследования подсчитаны оценки дисперсий s_i^2. Требуется сравнить эти дисперсии.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с одинаковыми генеральными дисперсиями: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с разными дисперсиями.

Статистикой критерия является случайная величина F_{max} – отношение максимальной выборочной дисперсии к минимальной:

$$\boxed{F_{max} = \frac{s^2_{max}}{s^2_{min}}},$$

которая сопоставляется с критическими значениями $F_\alpha(m, n)$, найденными в статистических таблицах для уровней значимости α, числа исследуемых выборок m и объема выборок n. Если эмпирическое значение критерия попадает в область допустимых значений, то есть если выполняется неравенство

$$F_{max} \le F_\alpha(m, n),$$

нулевая гипотеза об однородности дисперсий независимых выборок не отвергается. В качестве оценки генеральной дисперсии в этом случае принимается среднее арифметическое выборочных дисперсий.

Если эмпирическое значение попадает в критическую область критерия, то есть если выполняется неравенство $F_{max} > F_\alpha(m, n)$, принимается альтернативная гипотеза.

Пример III.4. По окончании обучения в начальной школе психолог оценил устойчивость внимания учащихся пяти классов третьей параллели. В каждом классе было обследовано по 20 учеников, значения выборочных дисперсий устойчивости внимания третьеклассников оказались следующими: $s_1^2 = 30{,}8$; $s_2^2 = 41{,}6$; $s_3^2 = 37{,}2$; $s_4^2 = 39{,}4$; $s_5^2 = 30{,}6$. В предположении нормального распределения показателей устойчивости внимания требуется проверить нулевую гипотезу об однородности генеральных дисперсий показателей устойчивости внимания всех пяти классов параллели: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_5^2 = \sigma^2$.

Решение. Вследствие того, что, во-первых, исследуемая характеристика имеет в популяции нормальный закон распределения и, во-вторых, объемы всех выборок равны, для проверки нулевой гипотезы можем использовать критерий Хартлея.

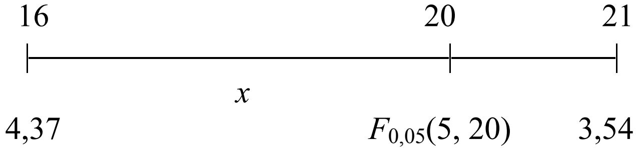
Эмпирическое значение критерия находим по формуле

$$F_{max} = \frac{s_2^2}{s_5^2} = \frac{41{,}6}{30{,}6} = 1{,}36\,.$$

Критические значения критерия определяем по статистическим таблицам. Значений для $m = 5$ и $n = 20$ в таблице нет, поэтому используем метод аппроксимации: выбираем критические значения, бо́льшие и ме́ньшие $F(5, 20)$

$F_{0,05}(5, 16) = 4{,}37$ $\qquad$ $F_{0,05}(5, 21) = 3{,}54$

и отмечаем на диаграмме:



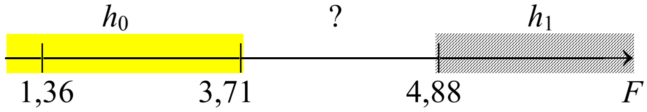
Искомое критическое значение равно $F_{0,05}(5, 20) = 4{,}37 – x$.

Неизвестное x здесь следует вычитать, а не складывать, потому что с увеличением объема выборки (от 16 до 21) критические значения уменьшаются (от 4,37 до 3,54)!

Для нахождения неизвестного x составляем пропорцию

$$\frac{|21-16|}{|3{,}54-4{,}37|}=\frac{|20-16|}{x},$$

откуда $x=\frac{0{,}83\cdot 4}{5}=0{,}664$ и $F_{0,05}(5,\,20) = 4{,}37 - 0{,}664 = 3{,}706$. Аналогично вычисляется $F_{0,01}(5,\,20) = 4{,}88$. Однако сопоставление эмпирического значения $F_{\max} = 1{,}36$ с критическим $F_{0,05} = 3{,}71$ уже показывает, что эмпирическое значение критерия попадает в область допустимых значений, поэтому второе значение вычислять не обязательно:



Итак, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается, следовательно, индивидуальные особенности учителей начальных классов не оказывают существенного влияния на разброс показателей устойчивости внимания учеников.

Все классы можно объединить, и по пяти выборочным дисперсиям оценить значение генеральной дисперсии. Так как объемы всех выборок одинаковы, то оценка дисперсии представляет собой среднее арифметическое дисперсий: $s^2 = 35{,}92$.

Вычислим 95 %-й доверительный интервал для генеральной дисперсии:

$$s^2\,\frac{df}{\chi^2_{\alpha/2}}<\sigma^2<s^2\,\frac{df}{\chi^2_{1-\alpha/2}};$$

$$35{,}92\cdot\frac{95}{123{,}86}<\sigma^2<35{,}92\cdot\frac{95}{69{,}925};$$

$$27{,}55<\sigma^2<48{,}80,\quad \alpha=0{,}05.$$

Критические значения критерия Пирсона χ^2 найдены в статистических таблицах распределения «хи–квадрат» для уровней значимости $\alpha/2 = 0{,}025$ и $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и числа степеней свободы $df = N - m = 95$.

§ 11. Критерий Кочрена

Назначение параметрического критерия Кочрена то же, что и критерия Хартлея. В связи с тем, что критерий Кочрена использует больше информации, он оказывается несколько более чувствительным, чем критерий Хартлея. Он является предпочтительным в случаях, когда одна из выборочных дисперсий значительно больше остальных, а также при количестве выборок $m > 12$.

Ограничения те же, что и для критерия Хартлея.

Гипотезы те же, что и в критерии Хартлея.

Статистикой критерия является величина $G_{\max}$ – отношение максимальной выборочной дисперсии к сумме всех выборочных дисперсий:

$$\boxed{G_{\max}=\frac{s^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{m}s_i^2}},$$

которая сопоставляется с критическими значениями $G_\alpha(m,\,n)$, выбранными для уровней значимости α, числа выборок m и объема выборок n.

В случае, когда эмпирическое значение $G_{\max}$ попадает в область допустимых значений критерия, то есть если выполняется неравенство

$$G_{\max} \le G_{\alpha}(m, n),$$

нулевая гипотеза не отвергается, и в качестве оценки генеральной дисперсии принимается среднее арифметическое выборочных дисперсий.

Если эмпирическое значение попадает в критическую область критерия, нулевая гипотеза отвергается, принимается альтернативная гипотеза.

Пример III.5. Проверить нулевую гипотезу h_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_5^2 = \sigma^2$ с помощью критерия Кочрена по условию примера III.4.

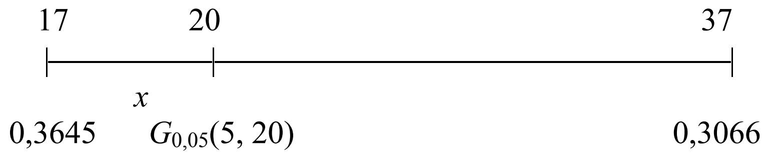
Решение. Эмпирическое значение критерия Кочрена находим по формуле

$$G_{\max} = \frac{s_2^2}{\sum\limits_i s_i^2} = \frac{41{,}6}{179{,}6} = 0{,}2316\,.$$

Критические значения определяем по статистическим таблицам методом аппроксимации: выбираем значения, бо́льшие и ме́ньшие $G(5, 20)$

$$G_{0{,}05}(5,\ 17) = 0{,}3645; \qquad G_{0{,}05}(5,\ 37) = 0{,}3066$$

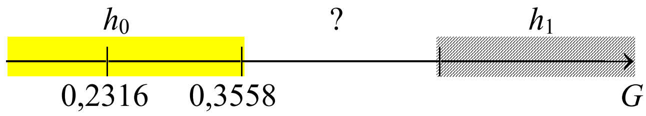
и отмечаем на диаграмме:



Искомое значение равно $G_{0{,}05}(5, 20) = 0{,}3645 - x$, где x найдем из пропорции

$$\frac{|37-17|}{|0{,}3066-0{,}3645|} = \frac{|20-17|}{x}, \qquad x = \frac{0{,}0579\cdot 3}{20} = 0{,}00869\,,$$

откуда $G_{0{,}05}(5, 20) = 0{,}3645 - 0{,}0087 = 0{,}3558$. Сопоставление эмпирического значения $G_{\max} = 0{,}2316$ с критическим $G_{0{,}05} = 0{,}3558$ уже показывает, что эмпирическое значение критерия попадает в область допустимых значений:



Таким образом, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается, следовательно, индивидуальные особенности учителей начальных классов не оказывают существенного влияния на разброс показателей устойчивости внимания учеников.

IV. КРИТЕРИИ СРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

А. КРИТЕРИИ ДЛЯ ДВУХ ВЫБОРОК

§ 12. Критерий Стьюдента

Назначение. Параметрический критерий Стьюдента позволяет сравнить два выборочных средних значения в случае, если исследуемая характеристика измерена в сильной шкале.

Ограничение: изучаемый признак должен быть измерен в **сильной шкале**.

Если проводились порядковые измерения, результаты могут оказаться ошибочными, в этом случае необходимо использовать непараметрические критерии: критерий знаков или критерий Манна–Уитни.

Описание критерия. Из двух генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2. По результатам исследования подсчитаны средние арифметические значения и выборочные дисперсии: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, и s_1^2, s_2^2. Требуется сравнить средние значения.

Нулевая гипотеза h_0: $a_1 = a_2 = a$ заключается в равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки. Альтернативная гипотеза h_1: $a_1 \neq a_2$ состоит в том, что выборки принадлежат генеральным совокупностям с разными мат. ожиданиями.

Схема вычислений. **1. В случае равенства генеральных дисперсий** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (что может быть проверено с помощью критерия Фишера) для проверки нулевой гипотезы вычисляется случайная величина:

$$\boxed{|\,t\,| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}},$$

где s – оценка среднего квадратического отклонения:

$$s = \sqrt{\frac{df_1 \cdot s_1^2 + df_2 \cdot s_2^2}{df_1 + df_2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Вычисленная статистика $|\,t\,|$ сопоставляется с критическими значениями распределения Стьюдента $t_\alpha(df)$, найденными в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $df = df_1 + df_2 = n_1 + n_2 - 2$.

Если эмпирическое значение $|\, t\,|$ попадает в <u>область допустимых значений</u> критерия Стьюдента, то есть если выполняется неравенство

$$|\, t\,| \le t_\alpha(df),$$

нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий не отвергается, обе выборки можно объединить в одну и по двум выборочным средним произвести оценку математического ожидания

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2}{n_1 + n_2},$$

используемую для построения доверительных интервалов:

$$a = \bar{x} \pm \Delta x,$$

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{сл})^2 + (\Delta x_{ин})^2}.$$

Случайная компонента $\Delta x_{сл}$ определяется следующим образом:

$$\Delta x_{сл} = t_\alpha(df) \cdot \frac{s}{\sqrt{n_1 + n_2}}, \qquad df = df_1 + df_2 = n_1 + n_2 - 2.$$

В случае, если значение $|\, t\,|$ попадает в <u>критическую область</u> критерия, верной считается альтернативная гипотеза $a_1 \ne a_2$. Для каждого математического ожидания строится свой доверительный интервал:

$$a_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1,$$

где случайная компонента $\Delta x_{сл1}$ определяется следующим образом:

$$\Delta x_{сл1} = t_\alpha(df_1) \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n_1}}, \qquad df_1 = n_1 - 1.$$

2. В случае отсутствия равенства генеральных дисперсий (эмпирическое значение критерия Фишера попадает либо в критическую область, либо в область неопределенности) эмпирическое значение критерия Стьюдента вычисляется по формуле

$$\boxed{|\, t\,| = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}},$$

которое также сравнивается с критическими значениями распределения Стьюдента $t_\alpha(df)$, где число степеней свободы df находится из уравнения:

$$\frac{1}{df} = \frac{c^2}{df_1} + \frac{(1-c)^2}{df_2}, \qquad c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

Если эмпирическое значение $|\, t\,|$ попадает в <u>область допустимых значений</u> критерия Стьюдента, то есть если выполняется неравенство

$$|\, t\,| \le t_\alpha(df),$$

нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий не отвергается.

Однако в этом случае выборки объединить нельзя, потому что они неоднородны вследствие неравенства дисперсий. Для каждой выборки необходимо отдельно рассчитать доверительные интервалы для мат. ожидания:

$$a_1 = \bar{x} \pm \Delta x_1, \qquad \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2}{n_1 + n_2},$$

$$\Delta x_{сл1} = t_\alpha(df_1) \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n_1}}, \qquad df_1 = n_1 - 1.$$

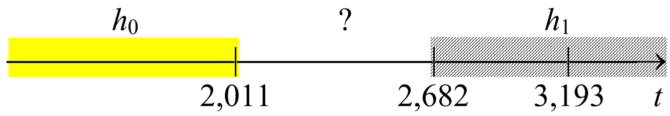
В случае, если значение $|\,t\,|$ попадает в <u>критическую область</u> критерия, верной считается альтернативная гипотеза $a_1 \neq a_2$. Для каждого математического ожидания строится свой доверительный интервал: $a_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1$.

Пример IV.1. По данным примера III.1 требуется проверить нулевую гипотезу h_0: $a_1 = a_2 = a$ о равенстве математических ожиданий познавательной активности 30 учащихся средней школы и 20 учащихся гуманитарного лицея ($n_1 = 30$, $n_2 = 20$, $\bar{x}_1 = 401$, $\bar{x}_2 = 409$, $s_1^2 = 71$, $s_2^2 = 82$). Предполагается, что познавательная активность в популяции подчиняется закону нормального распределения.

<u>Решение</u>. Предположение о нормальном законе распределения познавательной активности в популяции позволяет использовать критерий Стьюдента для проверки нулевой гипотезы. При решении примера III.1 было показано, что имеющиеся эмпирические данные не позволяют отклонить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. В связи с этим расчет эмпирического значения критерия Стьюдента производим по формуле согласно Случаю 1. Оценка дисперсии была найдена в примере III.1: $s^2 = 75{,}4$; откуда $s = 8{,}68$. Эмпирическое значение критерия Стьюдента равно:

$$|\,t\,| = \frac{|401 - 409|}{8{,}68 \cdot \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}}} = 3{,}193.$$

Критические значения $t_\alpha(df)$ находим в статистической таблице распределения Стьюдента для числа степеней свободы $df = df_1 + df_2 = n_1 + n_2 - 2 = 30 + 20 - 2 = 48$:



Эмпирическое значение попадает в критическую область критерия Стьюдента, следовательно, нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий отвергается. Таким образом, показатели познавательной активности учащихся средней школы и гуманитарного лицея различаются значимо ($p < 0{,}01$), а тип учебного заведения оказывает существенное влияние на уровень познавательной активности школьника.

Вычислим 95 %-ные доверительные интервалы для математических ожиданий познавательной активности школьников и лицеистов (в отсутствие инструментальных погрешностей $a = \bar{x} \pm \Delta x_{сл}$):

$$a_ш = \bar{x}_1 \pm t_\alpha(df_1) \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} = 401 \pm 2{,}045 \cdot \sqrt{\frac{71}{30}} = 401{,}0 \pm 3{,}1, \quad \alpha = 0{,}05;$$

$$a_л = \bar{x}_2 \pm t_\alpha(df_2) \cdot \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}} = 409 \pm 2{,}093 \cdot \sqrt{\frac{82}{20}} = 409{,}0 \pm 4{,}2, \quad \alpha = 0{,}05.$$

§ 13. Критерий Манна–Уитни

Назначение. Ранговый критерий Манна–Уитни является непараметрическим аналогом критерия Стьюдента в случае, если проводились порядковые измерения или информация о законе распределения исследуемой характеристики в популяции отсутствует.

Критерий Манна–Уитни особенно эффективен при сравнительно малых объемах выборок (до 60).

Ограничение: $n_i > 3$: объем каждой выборки должен быть больше трех; или: $n_1 = 2$, $n_2 > 4$.

Описание критерия. Из двух генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2. В результате исследования получены числовые значения изучаемого показателя в первой и во второй выборках. Требуется сравнить выборочные показатели.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, то есть имеют тождественные функции распределения: $F_1(x) = F_2(x)$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат различным генеральным совокупностям: $F_1(x) \neq F_2(x)$.

Схема вычислений. Значения характеристики двух выборок объединяются в общий вариационный ряд с отметкой принадлежности каждого члена ряда к соответствующей выборке и производится ранжирование членов ряда (меньшие значения получают меньшие ранги). Одинаковым значениям общего вариационного ряда присваиваются одинаковые ранги, равные среднему арифметическому.

Затем подсчитываются суммы рангов R_1 и R_2 каждой выборки. В качестве проверки правильности вычислений используют соотношение

$$R_1 + R_2 = ½\,(n_1 + n_2)\,(n_1 + n_2 + 1).$$

Далее подсчитываются инверсии:

$$U_1 = n_1\, n_2 + ½\, n_2\,(n_2 + 1) - R_2;$$

$$U_2 = n_1\, n_2 + ½\, n_1\,(n_1 + 1) - R_1$$

с контролем по формуле: $U_1 + U_2 = n_1\, n_2$.

Статистикой критерия Манна–Уитни является случайная величина U – наименьшая из двух инверсий: $U = \min(U_1, U_2)$.

Проверка нулевой гипотезы об однородности совокупностей осуществляется по-разному, в зависимости от объемов исследуемых выборок.

При $n_1 + n_2 \geq 20$ и $n_i > 3$ величина U распределена нормально с параметрами $M(U) = \dfrac{1}{2}\, n_1 n_2$ и $\sigma^2(U) = \dfrac{1}{12}\, n_1 n_2\,(n_1 + n_2 + 1)$. При меньшем объеме выборок ($n_1 + n_2 < 20$) распределение величины U отличается от нормального.

1. В случае, когда $n_1 + n_2 \geq 20$ проверка нулевой гипотезы сводится к вычислению нормированной случайной величины z:

$$\boxed{z = \frac{\left|U - \frac{1}{2}n_1 n_2\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}}}.$$

Если в выборках наблюдаются повторяющиеся значения, то z вычисляется по следующей формуле

$$\boxed{z = \frac{\left|U - \frac{1}{2}n_1 n_2\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{12(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} \cdot \left[(n_1+n_2)^3 - (n_1+n_2) - \sum_{k=1}^{m}(t_k^3 - t_k)\right]}}}.$$

В корректирующем члене через t_k обозначено число одинаковых значений в каждой из m групп.

Эмпирическое значение z сравнивается с квантилями нормального распределения $z_{1-\alpha/2}$ ($z_{0,975} = 1,960$ и $z_{0,995} = 2,576$).

При попадании эмпирического значения z в область допустимых значений ($z \leq z_{0,975} = 1,960$) нулевая гипотеза $F_1(x) = F_2(x)$ не отвергается; при попадании в критическую область ($z > z_{0,995975} = 2,576$) верной считается альтернативная гипотеза о принадлежности выборок различным генеральным совокупностям.

2. В случае, когда $n_1 + n_2 < 20$, нулевую гипотезу проверяют путем непосредственного сравнения наименьшей инверсии U с критическими значениями $U_\alpha(n_1, n_2)$, которые находятся для уровней значимости α и объемов выборок n_1, n_2 (табл. 9). Нулевая гипотеза о тождественности функций распределения не отвергается, если

$$U > U_\alpha(n_1, n_2).$$

Пример IV.2. Известная фирма производит не менее известный напиток и хочет, чтобы его покупали как можно больше людей. С этой целью она тратит огромные деньги на рекламу своей продукции. В прошлом месяце ее рекламный арсенал пополнился замечательно сделанным видеороликом и легко запоминающимся музыкальным отрывком. Видеоролик в течение двух недель демонстрировался 12 раз в час по местному каналу города *С.*, аудиозапись – каждые 5 минут в рекламном блоке местного *FM*-радио города *Б.* После двухнедельного воздействия на потенциальных покупателей в случайно отобранных 20 магазинах города *С.* и 18 магазинах города *Б.* было подсчитано, на сколько процентов увеличился объем продаж рекламируемого напитка:

Видеоролик: 22,0 22,9 24,9 28,2 28,3 28,7 29,3 30,4 30,5 30,5 30,5 30,6 30,7 31,1 31,1 31,2 32,1 32,1 34,0 35,6 (%).

Реклама на радио: 24,5 26,7 27,7 28,6 28,7 29,8 30,0 30,2 30,7 31,1 31,2 31,4 31,5 31,6 31,8 32,1 32,3 32,8 (%).

Требуется сравнить эффективность воздействия на потенциальных покупателей двух различных способов рекламирования напитка.

Решение. Нулевой гипотезой h_0 является предположение о том, что различий между способами воздействия видео- и аудиорекламы на потенциального покупателя нет, то есть обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности и имеют тождественные функции распределения: $F_1(x) = F_2(x)$.

Таблица 9

Критические значения критерия Манна–Уитни $U_\alpha(n_1, n_2)$

n_1	n_2 – выборка **меньшего** объема								
	2	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**
	α = 0,05								
4	–	–	0						
5	**–**	**0**	**1**	**2**					
6	–	1	2	**3**	5				
7	–	1	3	**5**	6	8			
8	0	2	4	**6**	8	10	13		
9	0	2	4	**7**	10	12	15	17	
10	**0**	**3**	**5**	**8**	**11**	**14**	**17**	**20**	**23**
11	0	3	6	**9**	13	16	19	23	**26**
12	1	4	7	**11**	14	18	22	26	**29**
13	1	4	8	**12**	16	20	24	28	**33**
14	1	5	9	**13**	17	22	26	31	**36**
15	**1**	**5**	**10**	**14**	**19**	**24**	**29**	**34**	**39**
16	1	6	11	**15**	21	26	31	37	**42**
17	2	6	11	**17**	22	28	34	39	**45**
18	2	7	12	**18**	24	30	36	42	**48**
	α = 0,01								
4	–	–	–	**–**	–	–	–	–	**–**
5	**–**	**–**	**–**	**0**					
6	–	–	0	**1**	2				
7	–	–	0	**1**	3	4			
8	–	–	1	**2**	4	6	7		
9	–	0	1	**3**	5	7	9	11	
10	**–**	**0**	**2**	**4**	**6**	**9**	**11**	**13**	**16**
11	–	0	2	**5**	7	10	13	16	**18**
12	–	1	3	**6**	9	12	15	18	**21**
13	–	1	3	**7**	10	13	17	20	**24**
14	–	1	4	**7**	11	15	18	22	**26**
15	**–**	**2**	**5**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**29**
16	–	2	5	**9**	13	18	22	27	**31**
17	–	2	6	**10**	15	19	24	29	**34**
18	–	2	6	**11**	16	21	26	31	**37**

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что генеральные совокупности, из которых выделены выборки, имеют различные функции распределения.

Отсутствие информации о законе распределения увеличения объемов продаж напитка после его рекламирования в СМИ не позволяет использовать критерий Стьюдента для проверки нулевой гипотезы. С этой целью необходимо использовать ранговый критерий Манна–Уитни. Критерий имеет ограничение по объемам выборки (они должны быть больше трех), которое выполняется.

Обе выборки объединяем в единый вариационный ряд (табл. 10) и производим обыкновенное ранжирование (ранги для неповторяющихся значений совпадают с порядковыми номерами). Одинаковым значениям вариационного ряда присваиваем одинаковые ранги, равные среднему арифметическому порядковых номеров. Например, значениям 28,7 % присваиваем общий ранг, равный среднему арифметическому порядковых номеров: (10 + 11)/2 = 10,5.

Далее подсчитываем суммы рангов выборок:

$R_в = 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 10{,}5 + 12 + 16 + 18 \cdot 3 + 20 + 21{,}5 + 24 \cdot 2 + 26{,}5 + 33 \cdot 2 + 37 + 38 = 371{,}5;$

$R_р = 3 + 5 + 6 + 9 + 10{,}5 + 13 + 14 + 15 + 21{,}5 + 24 + 26{,}5 + 28 + 29 + 30 + 31 + 33 + 35 + 36 = 369{,}5.$

В качестве проверки правильности вычислений используем соотношение

$$R_в + R_р = ½ (n_в + n_р) (n_в + n_р + 1);$$

$$R_в + R_р = 371{,}5 + 369{,}5 = 741;$$

$$½ (n_в + n_р) (n_в + n_р + 1) = ½ (20 + 18) (20 + 18 + 1) = 741.$$

Затем подсчитываем инверсии:

$$U_в = n_в n_р + ½ n_р (n_р + 1) – R_р = 360 + 0{,}5 \cdot 18 (18 + 1) – 369{,}5 = 161{,}5;$$

$$U_р = n_в n_р + ½ n_в (n_в + 1) – R_в = 360 + 0{,}5 \cdot 20 (20 + 1) – 371{,}5 = 198{,}5,$$

которые контролируем по формуле

$$U_в + U_р = n_в n_р:$$

$$U_в + U_р = 161{,}5 + 198{,}5 = 360;$$

$$n_в n_р = 20 \cdot 18 = 360.$$

Наименьшей из двух инверсий является величина $U = 161{,}5$.

Так как $n_в + n_р = 38 \geq 20$, для проверки нулевой гипотезы вычисляем случайную величину z (выбираем случай с учетом повторяющихся значений).

В вариационном ряду (табл. 10) имеется $m = 6$ групп одинаковых значений (28,7 %, 30,5 %, 30,7 %, 31,1 % и 31,2 %). Числа одинаковых значений в каждой из шести групп соответственно равны: $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$.

Рассчитаем значение поправки в формуле для z:

$$\sum_{k=1}^{m}(t_k^3 - t_k) = (2^3 – 2) \cdot 3 + (3^3 – 3) \cdot 3 = 90.$$

Таблица 10

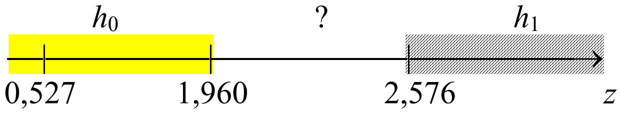
Ранжирование вариационного ряда

№	x_i	*Выборка*	*Ранги*
1	22,0	*в*	1
2	22,9	*в*	2
3	24,5	*р*	3
4	24,9	*в*	4
5	26,7	*р*	5
6	27,7	*р*	6
7	28,2	*в*	7
8	28,3	*в*	8
9	28,6	*р*	9
10	28,7	*в*	10,5
11	28,7	*р*	10,5
12	29,3	*в*	12
13	29,8	*р*	13
14	30,0	*р*	14
15	30,2	*р*	15
16	30,4	*в*	16
17	30,5	*в*	18
18	30,5	*в*	18
19	30,5	*в*	18
20	30,6	*в*	20
21	30,7	*в*	21,5
22	30,7	*р*	21,5
23	31,1	*в*	24
24	31,1	*в*	24
25	31,1	*р*	24
26	31,2	*в*	26,5
27	31,2	*р*	26,5
28	31,4	*р*	28
29	31,5	*р*	29
30	31,6	*р*	30
31	31,8	*р*	31
32	32,1	*в*	33
33	32,1	*в*	33
34	32,1	*р*	33
35	32,3	*р*	35
36	32,8	*р*	36
37	34,0	*в*	37
38	35,6	*в*	38

Скорректированное значение z равно

$$z = \frac{|161{,}5 - 0{,}5 \cdot 18 \cdot 20| - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{18 \cdot 20}{12 \cdot 38 \cdot 37}(38^3 - 38 - 90)}} = 0{,}527\,.$$

Критическими значениями критерия являются квантили нормального распределения $z_{0,975} = 1{,}960$ и $z_{0,995} = 2{,}576$:



Вследствие того, что эмпирическое значение z попадает в область допустимых значений критерия, нулевая гипотеза о тождественности функций распределения двух выборок не отвергается. Эффективность воздействия двух различных способов рекламы на потенциальных покупателей можно считать одинаковой.

§ 14. Критерий знаков МакНемара

Назначение. Непараметрический критерий знаков МакНемара используется для сравнения медиан двух связанных совокупностей. Он позволяет установить наличие временного, ситуационного или структурного сдвига при условии, что проводились порядковые измерения или информация о законе распределения исследуемой величины отсутствует.

Следует помнить, что критерий знаков является приближенным и не предполагает принадлежность пар результатов общей генеральной совокупности.

Ограничения:

1) **выборки должны быть связанными** (первый и второй замеры проводятся на одних и тех же испытуемых);

2) объем выборки должен быть не меньше семи: $n \geq 7$.

Описание критерия. Критерий знаков базируется на биномиальном распределении $P_n(k) = C_k^n p^k q^{n-k}$, выражающем вероятность появления в n независимых испытаниях интересующего события ровно k раз. Это событие в каждом отдельном испытании может произойти с постоянной вероятностью $p = 0{,}5$ или не произойти с вероятностью $q = 1 - p = 0{,}5$:

$$\boxed{P_n(k) = C_k^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}}.$$

Из популяции извлекается выборка испытуемых, которых обследуют два раза (один и тот же показатель через промежуток времени, в разных условиях измерения или разные показатели по разным методикам, измеренные в одной шкале и в одинаковых единицах). Критерий знаков позволяет установить наличие временного, ситуативного или структурного сдвига путем сравнения выборочных медиан первого и второго замеров.

Нулевая гипотеза h_0 заключается в равенстве медиан первого и второго рядов числовых показателей: $m_1 = m_2 = m$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что два ряда показателей имеют разные медианы (то есть фактически принадлежат разным генеральным совокупностям).

Схема вычислений. Значения характеристик заносятся в таблицу (табл. 11) и подсчитывается количество сдвигов: положительных (количество плюсов в последней строке), отрицательных (количество минусов) и нулевых.

Таблица 11

Расчет сдвигов для критерия знаков

Замеры	Испытуемые			
	1	*2*	*3*	...
1 замер	x_1	x_2	x_3	
2 замер	y_1	y_2	y_3	
Сдвиг	+	–	0	

Нулевые сдвиги из дальнейшего рассмотрения исключаются.

Преобладающие сдвиги среди оставшихся являются *типичными*; сдвиги противоположного направления – *нетипичными*. Например, если после экспериментального воздействия у большинства испытуемых отрицательное отношение к чему-либо сменилось на положительное, то типичным является положительный сдвиг.

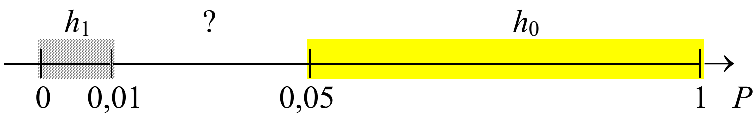
Для проверки нулевой гипотезы подсчитывается вероятность появления нетипичных сдвигов. В формулу для $P_n(k)$ (см. выше) подставляют: n – количество *ненулевых* сдвигов (объем выборки минус количество нулевых сдвигов) и k – количество *нетипичных* сдвигов.

Правило статистического решения:

– нулевая гипотеза о равенстве медиан не отвергается при выполнении неравенства $P_n(k) \geq 0{,}05$ (вероятность нетипичного сдвига велика);

– альтернативная гипотеза о наличии достоверного сдвига считается верной, если $P_n(k) \leq 0{,}01$ (вероятность нетипичного сдвига мала);

– при выполнении неравенства $0{,}01 < P_n(k) < 0{,}05$ решение о нулевой гипотезе не принимается:



Обратите внимание! Диаграмма критерия знаков отличается от диаграмм остальных статистических критериев тем, что области допустимых значений и критическая «поменялись местами». Статистикой критерия является вероятность *нетипичного* сдвига, поэтому ее большие значения свидетельствуют в пользу нулевой гипотезы, а не наоборот, как в остальных критериях.

Пример IV.3. Участники программы тренинга партнерского общения, продолжавшегося 7 дней, по 10-балльной шкале дважды оценивали у себя уровень владения таким важным коммуникативным навыком, как активное слушание. Первое измерение производилось в первый день тренинга, второе – в последний:

До	6	3	4	4	6	7	3	6	6	5
После	12	6	8	6	4	8	7	5	7	7

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, ощущаются ли участниками тренинга достоверные сдвиги в уровне владения активным слушанием.

Решение. Нулевой гипотезой h_0: $m_1 = m_2 = m$ является предположение об отсутствии различий между медианами первого и второго замеров. Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что первый и второй замеры имеют разные медианы.

Для проверки нулевой гипотезы используем критерий знаков МакНемара. Подсчитаем количество положительных, отрицательных и нулевых сдвигов в экспериментальной и контрольной группах (табл. 12).

Таблица 12

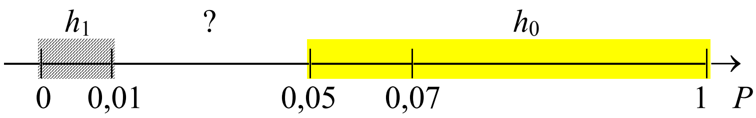
Расчет количества сдвигов

Замер	Испытуемые									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
До	6	3	4	4	6	7	3	6	6	5
После	12	6	8	6	4	8	7	5	6	7
Сдвиг	+	+	+	+	–	+	+	–	0	+

Всего сдвигов – 10, из них: положительных – 7, отрицательных – 2, нулевых – 1. Среди ненулевых сдвигов ($n = 10 - 1 = 9$) преобладающим является положительный, следовательно, нетипичный сдвиг – отрицательный ($k = 2$).

Для проверки нулевой гипотезы о равенстве медиан подсчитываем вероятность появления нетипичного (отрицательного) сдвига среди ненулевых сдвигов:

$$P_9(2) = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{1}{512} \cdot \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 0{,}07 > 0{,}05\,.$$



Вследствие того, что вероятность нетипичного сдвига (0,07) оказалась больше 0,05, она попадает в область допустимых значений критерия, что не дает оснований для отвержения нулевой гипотезы. Эмпирические данные не позволяют сделать вывод о том, что участники тренинга партнерского общения ощутили достоверные сдвиги в уровне овладения активным слушанием после проведения тренинга.

Б. КРИТЕРИИ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ВЫБОРОК

§ 15. Однофакторный дисперсионный анализ

Назначение. Однофакторный дисперсионный анализ позволяет установить однородность нескольких выборок, проявляющуюся в равенстве математических ожиданий и дисперсий генеральных совокупностей, из которых они отобраны в случае, если исследуемая характеристика имеет нормальное распределение в популяции.

Дисперсионный анализ – это анализ изменчивости признака под влиянием каких-либо контролируемых факторов. На практике его применяют, чтобы установить, оказывает ли существенное влияние некоторый фактор F на изучаемую величину X (например, тип учебного заведения: общеобразовательная школа / колледж / лицей на уровень развития мышления ученика). Однофакторный дисперсионный анализ, в отличие от многофакторного, исследует действие только одного фактора. Свое название метод получил потому, что основан на сравнении дисперсий. Основная идея однофакторного дисперсионного анализа состоит в сравнении «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной случайными причинами. Если различие между этими дисперсиями значимо, то считается, что фактор оказывает существенное влияние на *X*. В этом случае все групповые средние также различаются значимо.

Ограничения:

1) изучаемый признак должен иметь **нормальное распределение** и быть измерен в **сильной шкале**;

2) **дисперсии** всех генеральных совокупностей, из которых отобраны выборки, **должны быть равны**.

Ограничения, связанного с одинаковым количеством испытуемых в каждой группе, нет.

Описание метода. Из m нормальных генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1, n_2, ..., n_i, ..., n_m. По результатам исследования в каждой выборке подсчитаны оценки параметров распределения – средние арифметические значения и выборочные дисперсии $\bar{x}_1$, s_1^2; $\bar{x}_2$, s_2^2 и т.д. (табл. 13). Требуется установить однородность m генеральных совокупностей.

Нулевая гипотеза h_0 заключается в однородности всех генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки, то есть о равенстве мат. ожиданий и дисперсий всех генеральных совокупностей:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a,$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2.$$

Нулевая гипотеза h_0 – это гипотеза о том, что различия между условиями изучаемого фактора являются не более выраженными, чем случайные различия внутри каждой выборки.

Таблица 13

Данные для дисперсионного анализа

№	Уровни фактора					
	F_1	F_2	…	F_i	…	F_m
1	x_{11}	x_{21}	…	x_{i1}	…	x_{m1}
2	x_{12}	x_{22}	…	x_{i2}	…	x_{m2}
...	…	…	…	…	…	…
j	x_{1j}	x_{2j}	…	x_{ij}	…	x_{mj}
...	…	…	…	…	…	…
n_i	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{in}	…	x_{mn}
n_i	n_1	n_2	…	n_i	…	n_m
$\bar{x}_i$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_i$	…	$\bar{x}_m$
s_i^2	s_1^2	s_2^2	…	s_i^2	…	s_m^2

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что исследуемые выборки не являются однородными.

Схема вычислений.

1. Проверка нормальности распределения результативного признака с помощью критериев согласия (например, критерия χ^2 Пирсона) или неравенств Чебышева. Дисперсионный анализ очень чувствителен к отклонениям от нормального закона, поэтому дальнейшие вычисления проводятся только в случае подтверждения нормальности.

2. <u>Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий</u> $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2 = \sigma^2$ с помощью критериев Бартлета, Хартлея или Кочрена. Дальнейшие вычисления проводятся только в случае однородности дисперсий.

3. <u>Расчет суммы квадратов *SS* полной (общей) дисперсии s^2</u>.

Полная (общая) дисперсия s^2 характеризует общую вариативность изучаемого признака и вычисляется по результатам испытуемых всех m групп. Для расчета суммы квадратов *SS* полной дисперсии составляется расчетная таблица 14, в контрольную строку которой записываются суммы второго, третьего и пятого столбцов. Искомая сумма квадратов *SS* индивидуальных значений есть сумма пятого столбца (обозначение от *англ.* <u>s</u>um of <u>s</u>quares):

$$SS = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 n_k ,$$

Таблица 14

Расчет SS полной (общей) дисперсии

x_k	n_k	$x_k n_k$	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2 n_k$
⟧	‖	⟧		~
x_1	n_1	$x_1 n_1$	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2 n_1$
x_2	n_2	$x_2 n_2$	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2 n_2$
…	…	…	…	…
	N	**Σ**		***SS***

где x_k – значения изучаемых характеристик, n_k – их частоты, N – общее количество всех испытуемых: $N = \sum_k n_k$, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_k x_k n_k$ – выборочное общее среднее, $df = N - 1$ – число степеней свободы.

4. <u>Нахождение компонент дисперсии</u>. В однофакторном дисперсионном анализе полная (общая) дисперсия раскладывается на две компоненты: *межгрупповую* s_M^2 (*факторную*) и *внутригрупповую* s_B^2 (*остаточную*).

<u>Межгрупповая дисперсия</u> обусловлена влиянием изучаемого фактора и характеризует вариативность признака, определяемую действием этого фактора. Так как каждое условие фактора предъявляется отдельной группе испытуемых, то различие в показателях между разными условиями – это одновременно и различие *между* группами испытуемых.

Для расчета межгрупповой дисперсии составляется своя расчетная таблица (см. табл. 15). Выборочные средние значения $\bar{x}_i$ берутся из таблицы 13. Межгрупповая дисперсия вычисляется по формуле

Таблица 15

Расчет межгрупповой дисперсии

$\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i - \bar{x}$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$
⟧	‖	⟧	
$\bar{x}_1$	n_1	$\bar{x}_1 - \bar{x}$	$(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 n_1$
$\bar{x}_2$	n_2	$\bar{x}_2 - \bar{x}$	$(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 n_2$
…	…	…	…
$\bar{x}_m$	n_m	$\bar{x}_m - \bar{x}$	$(\bar{x}_m - \bar{x})^2 n_m$
			SS$_M$

$$\boxed{s_M^2 = \frac{SS_M}{df_M} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i},$$

где SS_M – сумма квадратов, m – число групп испытуемых, $df_M = m - 1$ – число степеней свободы, $\bar{x}_i$ – выборочные средние значения (табл. 13), $\bar{x}$ –

выборочное общее среднее, n_i – объемы выборок.

Внутригрупповая дисперсия является «случайной», или «остаточной». Она характеризует внутреннее рассеяние, связанное с неоднородностью индивидуальных характеристик испытуемых внутри каждой группы, а также обусловленное неучтенными факторами. Всякие различия между испытуемыми *внутри* каждой группы объясняются неконтролируемыми иррелевантными факторами, не имеющими отношения к исследованию.

Внутригрупповая дисперсия вычисляется по формуле

$$\boxed{s_B^2 = \frac{SS_B}{df_B} = \frac{SS - SS_M}{df - df_M} = \frac{1}{N-m}\sum_i^m \sum_j^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2},$$

где SS и SS_M, df и df_M – суммы квадратов и числа степеней свободы полной и межгрупповой дисперсий, N – общее число всех испытуемых, m – количество групп испытуемых, x_{ij} – значение характеристики j-го испытуемого из i-й группы, $\bar{x}_i$ – выборочное среднее значение в i-й группе.

Ход вычислений компонент дисперсии показан в таблице 16.

Таблица 16

Схема однофакторного дисперсионного анализа

Компонента дисперсии	***Сумма квадратов, SS***	***Число степеней свободы, df***	***Дисперсия***
Межгрупповая	$SS_M = \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$	$df_M = m - 1$	$s_M^2 = \frac{SS_M}{df_M}$
Внутригрупповая	$SS_B = SS - SS_M$	$df_B = N - m$	$s_B^2 = \frac{SS_B}{df_B}$
Полная (общая)	$SS = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 n_k$	$df = N - 1$	$s^2 = \frac{SS}{df}$

5. Проверка нулевой гипотезы об однородности генеральных совокупностей сводится к проверке гипотезы о равенстве межгрупповой и внутригрупповой дисперсий. Для этого вычисляют величину $F = \frac{s_M^2}{s_B^2}$, которую сравнивают с критическими значениями критерия Фишера, выбранными для уровней значимости α и числа степеней свободы df_M и df_B.

Если эмпирическое значение F попадает в область допустимых значений критерия Фишера: $F \le F_{0,05}(df_M;\ df_B)$, нулевая гипотеза об однородности изучаемых совокупностей не отвергается. Считается, что исследуемый фактор не оказывает значимого влияния на изучаемые свойства испытуемых, а все m выборок принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами a и σ^2. Оценкой ее математического ожидания служит выборочное общее среднее $\bar{x}$, а оценкой дисперсии – выборочная полная (общая) дисперсия s^2 (отношение SS к df).

Доверительные интервалы для a и σ^2 находятся из выражений

$$a = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t_{\alpha}(df) \cdot \sqrt{\frac{s^2}{N}}\,; \qquad \frac{SS}{\chi^2_{\alpha/2}(df)} < \sigma^2 < \frac{SS}{\chi^2_{1-\alpha/2}(df)}.$$

Если же эмпирическое значение F попадает в критическую область критерия Фишера: $F \geq F_{0{,}01}(df_M;\, df_B)$, нулевая гипотеза об однородности изучаемых совокупностей отвергается, принимается альтернативная. Это означает, что различия значений испытуемых между группами являются более выраженными, чем их случайные различия внутри каждой группы. Исследуемые выборки принадлежат генеральным совокупностям, распределенным нормально с одинаковой дисперсией σ^2 и, в общем случае, с разными математическими ожиданиями a_i. Оценкой генеральной дисперсии σ^2 является внутригрупповая дисперсия s_B^2, оценками математических ожиданий – выборочные средние $\bar{x}_i$.

Доверительные интервалы для a_i и σ^2 находятся из выражений:

$$a_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i = \bar{x}_i \pm t_{\alpha}(df_B) \cdot \sqrt{\frac{s_B^2}{n_i}}, \qquad \frac{SS_B}{\chi^2_{\alpha/2}(df_B)} < \sigma^2 < \frac{SS_B}{\chi^2_{1-\alpha/2}(df_B)}.$$

Выпадающие группы можно выявить путем парного сравнения отдельных групп с помощью критерия Стьюдента.

Пример IV.4. В таблице 17 приведены результаты лингвистического эксперимента, проведенного с целью выяснения влияния способа сообщения значения иноязычного слова на надежность его практического употребления: I серия – однословный перевод при полном совпадении понятий, II серия – однословный перевод при несовпадении понятий, III серия – многозначный перевод, IV серия – показ картинки, V серия – показ нескольких картинок, VI серия – истолкование выражаемых словом понятий, VII серия – включение слова в небольшой контекст.

Требуется сравнить эффективность рассмотренных способов сообщения значения иноязычного слова на надежность его практического употребления в речи. Изучаемая характеристика имеет нормальный закон распределения.

Таблица 17

Количество правильно употребляемых слов, %

№	*Способ сообщения значения слова*						
	I	***II***	***III***	***IV***	***V***	***VI***	***VII***
1	97,9	51,5	52,1	60,4	52,1	96,6	62,5
2	98,6	52,1	45,8	64,6	60,4	97,6	57,1
3	89,6	50,0	64,3	61,9	53,3	89,9	58,3
4	91,7	52,1	66,7	62,5	60,4	93,7	68,0
5	92,6	58,3	65,3	66,7	55,6	98,6	63,0
6	90,0	34,5	51,9	76,7	63,0	–	61,7
7	92,6	53,3	63,3	68,5	78,3	–	64,8
8	–	57,4	72,2	63,9	51,5	–	65,3
9	–	–	54,2	–	68,1	–	–
n_i	**7**	**8**	**9**	**8**	**9**	**5**	**8**
$\bar{x}_i$	**93,29**	**51,15**	**59,53**	**65,65**	**60,30**	**95,28**	**62,59**
s_i^2	**12,895**	**53,611**	**76,568**	**26,720**	**75,990**	**12,397**	**13,001**

Решение. Нулевая гипотеза h_0 об однородности семи исследуемых выборок:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a, \qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_7^2 = \sigma^2$$

– предположение об отсутствии различий между семью способами сообщения значения иноязычного слова. Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что исследуемые выборки не являются однородными. Для проверки нулевой гипотезы используем однофакторный дисперсионный анализ.

1. Главное ограничение однофакторного дисперсионного анализа – нормальность распределения – выполняется по условию задачи.

2. Проверяем гипотезу $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_7^2 = \sigma^2$ о равенстве генеральных дисперсий, для проверки используем критерий Бартлета (т.к. объемы выборок не равны). Эмпирическое значение критерия находим по формуле $B = \frac{V}{C}$ (знаменатель C вычислять не торопимся), для расчета которого составляем таблицу 18.

Таблица 18

Расчет эмпирического значения B

i	s_i^2	n_i	df_i	$1/df_i$	$df_i\ s_i^2$	$\lg s_i^2$	$df_i \lg s_i^2$
1	12,895	7	6	0,167	77,369	1,1104	6,6624
2	53,611	8	7	0,143	375,277	1,7293	12,1051
3	76,568	9	8	0,125	612,544	1,8840	15,0720
4	26,720	8	7	0,143	187,040	1,4268	9,9876
5	75,990	9	8	0,125	607,920	1,8808	15,0464
6	12,397	5	4	0,250	49,588	1,0933	4,3732
7	13,001	8	7	0,143	91,007	1,1140	7,798
		54	**47**	**1,096**	**2000,746**		**71,0447**

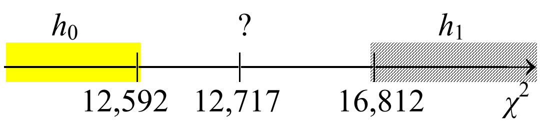
Используя суммы шестого и четвертого столбцов, находим значения s^2 и $\lg s^2$:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} df_i \cdot s_i^2}{df} = \frac{2000{,}746}{47} = 42{,}569; \qquad \lg s^2 = \lg 42{,}569 = 1{,}6291.$$

Числитель V эмпирического значения критерия Бартлета

$$V = 2{,}3026\left(df \cdot \lg s^2 - \sum_{i=1}^{m} df_i \cdot \lg s_i^2\right) = 2{,}3026 \cdot \left(47 \cdot 1{,}6291 - 71{,}0447\right) = 12{,}7173$$

сравниваем с критическими значениями критерия χ^2, найденными для числа степеней свободы $df = m - 1 = 6$: $\chi^2_{0,05}(6) = 12{,}592$; $\chi^2_{0,01}(6) = 16{,}812$:

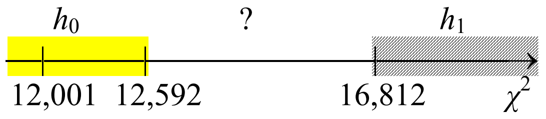


Так как значение V не попадает в область допустимых значений критерия «хи–квадрат», продолжаем вычисления дальше:

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{df_i} - \frac{1}{df}\right) = 1 + \frac{1}{3 \cdot 6}\left(1{,}096 - \frac{1}{47}\right) = 1{,}0597;$$

$$B = \frac{V}{C} = \frac{12{,}7173}{1{,}0597} = 12{,}0008.$$

Сравниваем значение B с теми же самыми критическими значениями:



Значение B попадает в область допустимых значений критерия «хи–квадрат», следовательно, отвергнуть нулевую гипотезу об однородности дисперсий нет оснований: второе ограничение однофакторного дисперсионного анализа также выполняется.

3. Для расчета SS полной дисперсии s^2 составляем расчетную таблицу 19, содержащую все значения всех семи выборок. В контрольную строку таблицы записываем суммы второго, третьего и пятого столбцов.

Выборочное общее среднее равно

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_k x_k n_k = \frac{3643{,}0}{54} = 67{,}463\,.$$

4. Нахождение компонент дисперсии. Для расчета межгрупповой дисперсии s_M^2 составляем расчетную таблицу 20, в которой выборочные средние значения $\bar{x}_i$ и объемы выборок n_i взяты из таблицы 17. Выборочное общее среднее $\bar{x} = 67{,}463$ было рассчитано в п. 3.

Таблица 20

Расчет межгрупповой дисперсии

$\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i - \bar{x}$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$
⟧	‖	⟧	
93,29	7	25,823	4 667,7014
51,15	8	-16,313	2 128,9021
59,53	9	-7,930	565,9112
65,65	8	-1,813	26,2947
60,30	9	-7,163	461,7723
95,28	5	27,817	3 868,9377
62,59	8	-4,875	190,1611
			11 909,6806

Число групп испытуемых $m = 7$, число степеней свободы $df_M = m - 1 = 6$.

Таблица 19

Расчет полной (общей) дисперсии

x_k	n_k	$x_k n_k$	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2 n_k$
⟧	‖	⟧		~
34,5	1	34,5	-32,96	1 086,5569
45,8	1	45,8	-21,66	469,2840
50,0	1	50,0	-17,46	304,9551
51,5	2	103,0	-15,96	509,6324
51,9	1	51,9	-15,56	242,2058
52,1	4	208,4	-15,36	944,0825
53,3	2	106,6	-14,16	401,1790
54,2	1	54,2	-13,26	175,9062
55,6	1	55,6	-11,86	140,7299
57,1	1	57,1	-10,36	107,3910
57,4	1	57,4	-10,06	101,2632
58,3	2	116,6	-9,16	167,9198
60,4	3	181,2	-7,06	149,6563
61,7	1	61,7	-5,76	33,2117
61,9	1	61,9	-5,56	30,9466
62,5	2	125,0	-4,96	49,2620
63,0	2	126,0	-4,46	39,8361
63,3	1	63,3	-4,16	17,3303
63,9	1	63,9	-3,56	12,6947
64,3	1	64,3	-3,16	10,0043
64,6	1	64,6	-2,86	8,1966
64,8	1	64,8	-2,66	7,0914
65,3	2	130,6	-2,16	9,3568
66,7	2	133,4	-0,76	1,1642
68,0	1	68,0	0,54	0,2884
68,1	1	68,1	0,64	0,4058
68,5	1	68,5	1,04	1,0754
72,2	1	72,2	4,74	22,4395
76,7	1	76,7	9,24	85,3229
78,3	1	78,3	10,84	117,4414
89,6	1	89,6	22,14	490,0484
89,9	1	89,9	22,44	503,4206
90,0	1	90,0	22,54	507,9180
91,7	1	91,7	24,24	587,4340
92,6	2	185,2	25,14	1 263,7413
93,7	1	93,7	26,24	688,3821
96,6	1	96,6	29,14	848,9669
97,6	1	97,6	30,14	908,2410
97,9	1	97,9	30,44	926,4132
98,6	2	197,2	31,14	1 939,0302
	54	**3643,0**		**13 910,4259**

Межгрупповая и внутригрупповая дисперсии вычисляются по формулам

$$s_M^2 = \frac{SS_M}{df_M} = \frac{11909{,}6806}{6} = 1984{,}9468;$$

$$s_B^2 = \frac{SS_B}{df_B} = \frac{SS - SS_M}{df - df_M} = \frac{13910{,}4259 - 11909{,}6806}{53 - 6} = 42{,}5690.$$

Результаты дисперсионного анализа приведены в таблице 21.

Таблица 21

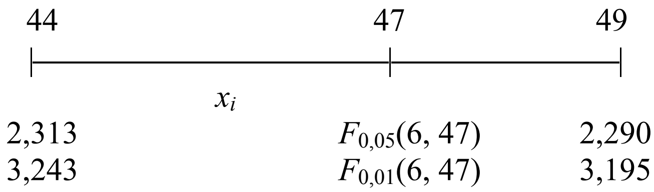
Дисперсионный анализ влияния способов сообщения значения иноязычного слова

Компонента дисперсии	***Сумма квадратов, SS***	***Число степеней свободы, df***	***Дисперсия***
Межгрупповая	11 909,6806	6	1 984,9468
Внутригрупповая	2 000,7453	47	42,5690
Полная (общая)	13 910,4259	53	

5. Проверка гипотезы о равенстве межгрупповой и внутригрупповой дисперсий с помощью критерия Фишера. С этой целью вычисляем эмпирическое значение

$$F = \frac{s_M^2}{s_B^2} = \frac{1984{,}9468}{42{,}5690} = 46{,}6289.$$

Критические значения критерия Фишера для чисел степеней свободы $df_M = 6$ и $df_B = 47$ определяем по статистическим таблицам методом аппроксимации: выбираем критические значения, бо́льшие и ме́ньшие $F(6, 47)$ и отмечаем на диаграмме: $F_{0,05}(6, 44) = 2{,}313$; $F_{0,05}(6, 49) = 2{,}290$; $F_{0,01}(6, 44) = 3{,}243$; $F_{0,01}(6, 49) = 3{,}195$.



Искомые критические значения находим по формулам

$$F_{0,05}(6, 47) = 2{,}313 - x_1;$$

$$F_{0,01}(6, 47) = 3{,}243 - x_2.$$

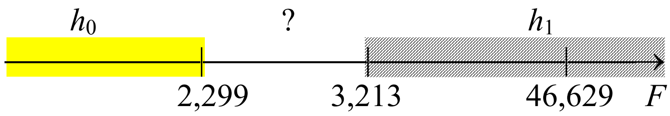
Для нахождения неизвестных x_i составляем пропорции:

$$\frac{|49-44|}{|2{,}290-2{,}313|} = \frac{|47-44|}{x_1}, \qquad x_1 = \frac{0{,}023 \cdot 3}{5} = 0{,}0138;$$

$$\frac{|49-44|}{|3{,}195-3{,}243|} = \frac{|47-44|}{x_2}, \qquad x_2 = \frac{0{,}048 \cdot 3}{5} = 0{,}0288.$$

$$F_{0,05}(6, 47) = 2{,}313 - x_1 = 2{,}313 - 0{,}014 = 2{,}299;$$

$$F_{0,01}(6, 47) = 3{,}243 - x_2 = 3{,}243 - 0{,}029 = 3{,}214.$$



Вследствие того, что эмпирическое значение $F = 46{,}629$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза об однородности изучаемых совокупностей отвергается. Результаты эксперимента свидетельствуют в пользу альтернативной гипотезы и позволяют сделать вывод о том, что способ сообщения значения иноязычного слова оказывает значимое влияние на надежность его практического употребления в речи. Однако с помощью дисперсионного анализа невозможно установить, какие из исследуемых способов являются более эффективными, для этого требуется дополнительная проверка (попарное сравнение групповых средних по критерию Стьюдента).

§ 16. Критерий Краскела–Уоллиса

Назначение. Ранговый критерий Краскела–Уоллиса является непараметрическим аналогом однофакторного дисперсионного анализа и позволяет проверить гипотезу о принадлежности нескольких выборок единой генеральной совокупности в случае, если проводились порядковые измерения или информация о законе распределения исследуемой характеристики в популяции отсутствует.

Ограничения:

1) количество сравниваемых выборок должно быть не менее четырех: $m \geq 4$ (три выборки попарно сравниваются с помощью критерия Манна–Уитни);

2) объем каждой выборки должен быть больше пяти: $n_i > 5$.

Описание критерия. Из m генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_i. В результате исследования получены числовые значения изучаемого показателя в исследуемых выборках. Требуется сравнить выборочные показатели.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что все m выборок принадлежат единой генеральной совокупности, то есть имеют тождественные функции распределения: $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_m(x)$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат различным генеральным совокупностям.

Схема вычислений. Все $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ выборочных значений объединяются в единый вариационный ряд с отметкой принадлежности каждого члена ряда к соответствующей выборке и производится обыкновенное ранжирование членов ряда (меньшие значения получают меньшие ранги). Одинаковым значениям общего вариационного ряда присваиваются одинаковые ранги, равные среднему арифметическому. Затем подсчитываются суммы рангов каждой выборки R_i. Правильность подсчета сумм рангов контролируется по формуле $\sum_{i=1}^{m} R_i = \frac{1}{2} N(N+1)$.

Статистикой критерия Краскела–Уоллиса служит величина

$$\boxed{H = \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3(N+1)}.$$

При равных объемах выборок ($n_1 = n_2 = \ldots = n_m = \frac{N}{m}$) величину H удобнее вычислять по формуле

$$H = \frac{12m}{N^2(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{m} R_i^2\right) - 3(N+1).$$

Если в выборках наблюдаются повторяющиеся значения, то в выражение для H необходимо внести поправку:

$$\boxed{H' = \frac{H}{1 - \frac{\sum\left(t_k^3 - t_k\right)}{N^3 - N}}},$$

где t_k – число одинаковых значений в каждой из m групп (вычисления производятся точно так же, как и в критерии Манна–Уитни).

Проверка нулевой гипотезы осуществляется с помощью критерия «хи–квадрат» для числа степеней свободы $df = m - 1$. При попадании эмпирического значения H в область допустимых значений: $H \le \chi_\alpha^2(m-1)$ нулевая гипотеза о тождественности распределений не отвергается. При попадании H в критическую область верной считается альтернативная гипотеза о неоднородности изучаемых совокупностей.

Путем отбрасывания резко выделяющихся выборок, для которых ранговые суммы чрезмерно малы или велики, на основании условия $H \le \chi_\alpha^2(m-1)$ можно выделить однородную группу выборок.

Пример IV.5. В таблице 22 приведены вариационные ряды относительного уменьшения (в процентах) количества выкуриваемых сигарет в день у участников эксперимента, подвергавшихся пяти различным способам психотерапевтического воздействия с целью снижения влечения к табаку.

Требуется сравнить эффективность пяти рассмотренных способов психотерапевтического воздействия на испытуемых.

Таблица 22

Вариационные ряды относительного уменьшения выкуриваемых сигарет, %

Участник	***Способ воздействия***				
	I	***II***	***III***	***IV***	***V***
1	6,7	8,4	7,1	6,4	7,2
2	6,9	8,9	7,2	6,8	7,8
3	7,2	9,3	8,4	8,7	7,9
4	7,2	10,1	8,5	9,4	8,4
5	8,0	10,8	8,6	9,6	8,7
6	8,5	11,0	9,3	9,6	9,6
7	8,5	11,2	9,7	9,9	9,8
8	9,4	–	10,1	–	10,1
9	9,8	–	10,4	–	–
n_i	**9**	**7**	**9**	**7**	**8**

Решение. Нулевой гипотезой h_0 является предположение об отсутствии различий между пятью способами воздействия на испытуемых, то есть гипотеза о принадлежности пяти указанных выборок единой генеральной совокупности с одинаковыми функциями распределения. Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что генеральные совокупности, из которых выделены выборки, имеют различные функции распределения.

Для проверки нулевой гипотезы используем критерий Краскела–Уоллиса. Оба ограничения критерия выполняются: количество сравниваемых выборок больше трех; объем каждой выборки больше пяти.

Все $N = 9 + 7 + 9 + 7 + 8 = 40$ выборочных значений объединяем в единый вариационный ряд (табл. 23) и производим обыкновенное ранжирование (ранги совпадают с порядковыми номерами значений). Одинаковым значениям вариационного ряда присваиваем одинаковые ранги, равные среднему арифметическому порядковых номеров.

Далее подсчитываем суммы рангов каждой выборки R_i:

$$R_1 = 2 + 4 + 7{,}5 \cdot 2 + 12 + 17 \cdot 2 + 25{,}5 + 31{,}5 = 124;$$

$$R_2 = 14 + 22 + 23{,}5 + 35 + 38 + 39 + 40 = 211{,}5;$$

$$R_3 = 5 + 7{,}5 + 14 + 17 + 19 + 23{,}5 + 30 + 35 + 37 = 188;$$

$$R_4 = 1 + 3 + 20{,}5 + 25{,}5 + 28 \cdot 2 + 33 = 139;$$

$$R_5 = 7{,}5 + 10 + 11 + 14 + 20{,}5 + 28 + 31{,}5 + 35 = 157{,}5.$$

Правильность подсчета сумм рангов контролируем по формуле

$$\sum_{i=1}^{m} R_i = \frac{1}{2} N(N+1):$$

Таблица 23

Ранжирование вариационного ряда

№	x_i	Выборка	Ранги
1	6,4	IV	1
2	6,7	I	2
3	6,8	IV	3
4	6,9	I	4
5	7,1	III	5
6	7,2	I	7,5
7	7,2	I	7,5
8	7,2	III	7,5
9	7,2	V	7,5
10	7,8	V	10
11	7,9	V	11
12	8,0	I	12
13	8,4	II	14
14	8,4	III	14
15	8,4	V	14
16	8,5	I	17
17	8,5	I	17
18	8,5	III	17
19	8,6	III	19
20	8,7	IV	20,5
21	8,7	V	20,5
22	8,9	II	22
23	9,3	II	23,5
24	9,3	III	23,5
25	9,4	I	25,5
26	9,4	IV	25,5
27	9,6	IV	28
28	9,6	IV	28
29	9,6	V	28
30	9,7	III	30
31	9,8	I	31,5
32	9,8	V	31,5
33	9,9	IV	33
34	10,1	II	35
35	10,1	III	35
36	10,1	V	35
37	10,4	III	37
38	10,8	II	38
39	11,0	II	39
40	11,2	II	40

$$\sum_{i=1}^{m} R_i = 124 + 211{,}5 + 188 + 139 + 157{,}5 = 820;$$

$$\frac{1}{2} N(N+1) = 0{,}5 \cdot 40 \cdot 41 = 820\,.$$

Эмпирическим значением критерия Краскела–Уоллиса является величина H:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1) =$$

$$= \frac{12}{40\cdot 41}\left(\frac{124^2}{9} + \frac{211{,}5^2}{7} + \frac{188^2}{9} + \frac{139^2}{7} + \frac{157{,}5^2}{8}\right) - 3\cdot 41 = 7{,}88\,.$$

В вариационном ряду имеется $m = 9$ групп одинаковых значений (7,2, 8,4, 8,5, 8,7, 9,3, 9,4, 9,6, 9,8 и 10,1 %), поэтому необходимо внести в расчеты H поправку. Числа одинаковых значений в каждой из 9 групп равны: $t_1 = 4$, $t_2 = 3$, $t_3 = 3$, $t_4 = 2$, $t_5 = 2$, $t_6 = 2$, $t_7 = 3$, $t_8 = 2$, $t_9 = 3$.

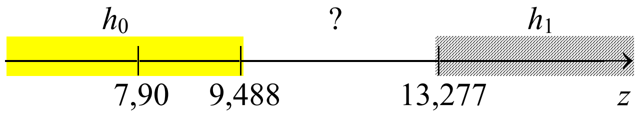
Рассчитаем значение поправки:

$$\sum_{k=1}^{m}(t_k^3 - t_k) = (4^3 - 4) + (3^3 - 3)\cdot 4 + (2^3 - 2)\cdot 4 = 180.$$

Скорректированное значение H равно

$$H' = \frac{7{,}88}{1 - \dfrac{180}{40^3 - 40}} = 7{,}90\,.$$

Критические значения находим по таблицам распределения «хи–квадрат» для числа степеней свободы $df = m - 1 = 4$:



Вследствие того, что эмпирическое значение H попадает в область допустимых значений критерия«хи–квадрат», нулевую гипотезу о тождественности функций распределения пяти выборок не отвергаем. Следовательно, различий в эффективности пяти рассмотренных способов воздействия на испытуемых, осуществляемых с целью снижения влечения к табаку, не обнаружено.

VI. КРИТЕРИЙ СРАВНЕНИЯ ЧАСТОТ

§ 17. Биномиальный критерий

Назначение. Критерий предназначен для проверки гипотезы о равенстве параметров двух биномиальных распределений и позволяет сравнить два значения частоты появления некоторого события в эксперименте, который проводится в двух разных условиях. Например, при изучении эффективности нового метода психотерапии сравнивают частоту выздоровевших в экспериментальной и контрольной группах (традиционный метод) испытуемых.

Ограничение: объем каждой выборки должен быть больше двадцати пяти: $n_i > 25$.

Описание критерия. Из 2 генеральных совокупностей извлечены независимые выборки объемами n_1, n_2. В результате исследования в первом случае в k_1 случаях произошло ожидаемое событие («успех»), во втором – в k_2 случаях. Относительные частоты наступления события в первой и второй выборках (i = 1, 2) соответственно равны:

$$w_i = \frac{k_i}{n_i}.$$

Требуется сравнить полученные относительные частоты.

Нулевая гипотеза h_0 состоит в том, что обе выборки принадлежат единой генеральной совокупности, имеющей биномиальное распределение с параметром p. Другими словами, вероятности наступления события в обоих случаях одинаковы: $p_1 = p_2 = p$.

Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные выборки принадлежат различным генеральным совокупностям с разными вероятностями наступления исследуемого события: $p_1 \neq p_2$.

Статистикой критерия является случайная величина

$$\boxed{|\,z\,| = \frac{|\,w_1 - w_2\,|}{\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{n_1+n_2}\left(1-\dfrac{k_1+k_2}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}},$$

имеющая асимптотически стандартное нормальное распределение.

Эмпирическое значение $|\,z\,|$ сравнивается с квантилями нормального распределения $z_{1-\alpha/2}$ (для $\alpha = 0{,}05$: $z_{1-\alpha/2} = 1{,}960$; для $\alpha = 0{,}01$: $z_{1-\alpha/2} = 2{,}576$).

При попадании эмпирического значения $|\,z\,|$ в область допустимых значений: $|z| \le 1{,}960$ нулевая гипотеза $p_1 = p_2$ не отвергается; при попадании в критическую область: $|z| > 2{,}576$ принимается альтернативная гипотеза $p_1 \ne p_2$ о принадлежности выборок различным генеральным совокупностям с разными значениями вероятности наступления интересующего события.

Пример V.1. 200 учащихся средней школы случайным образом были поделены на экспериментальную и контрольную группы по 100 человек каждая. Учащиеся экспериментальной группы изучали пособия, в которых сначала дается определение относительного понятия «выше, чем», а затем оно рассматривается на примере. В пособиях, предлагаемых учащимся контрольной группы, сначала приводятся примеры, а потом следует формулировка понятия. После изучения пособий учащимся обеих выборок был предложен один и тот же тест для определения, усвоено ли ими относительное понятие. В экспериментальной группе число правильных ответов оказалось равным 68, в контрольной – 54.

Требуется сравнить относительные частоты учащихся, усвоивших изучаемое понятие, в экспериментальной и контрольной группах.

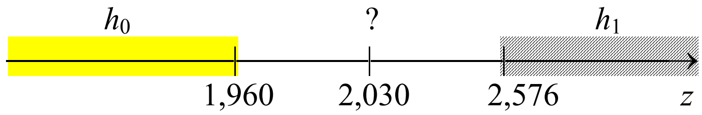
Решение. Нулевой гипотезой h_0 является предположение о равенстве вероятностей усвоения относительного понятия учащимися экспериментальной и контрольной групп: $p_э = p_к = p$. Альтернативная гипотеза h_1 состоит в том, что указанные вероятности не равны: $p_э \ne p_к$.

Для проверки нулевой гипотезы используем биномиальный критерий: случайная величина (количество правильных ответов в экспериментальной и контрольной группах) распределена по биномиальному закону, объемы каждой выборки больше 25.

Эмпирическое значение критерия равно

$$|z| = \frac{|0{,}68 - 0{,}54|}{\sqrt{\frac{68+54}{100+100}\left(1 - \frac{68+54}{100+100}\right)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 2{,}0296\,.$$

Сравнивая эмпирическое значение с квантилями нормального распределения $z_{0,975} = 1{,}960$ и $z_{0,995} = 2{,}576$, обнаруживаем, что $|z|$ попадает в область неопределенности:



Результаты эмпирического исследования не позволяют сделать однозначный вывод относительно нулевой гипотезы. С этой целью необходимо повторить исследование на более представительной выборке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Всему присуща своя красота, но не
каждому она видна.

Конфуций

С помощью колдовства герои старой сказки научились понимать язык птиц и зверей. Они сразу стали могущественнее, но вместе с тем и уязвимее: теперь они были в ответе за многое из того, чем раньше могли пренебречь по незнанию.

Столетие назад, основав биометрическую лабораторию, Фрэнсис Гальтон писал: «Пока феномены какой-нибудь отрасли знания не будут подчинены измерению и числу, они не могут приобрести статус и достоинство науки»[1]. Примечательно, что сам себя он психологом не считал ввиду неопределенного статуса этой науки в то время.

Сегодня психология поражает своей мощью, привлекая многих практическими достижениями: психотерапией, возможностью управления людьми, манипулированием. Однако при более тесном знакомстве с ней становится понятным, что удивляться надо скорее не факту их существования, а гармоничной системе научных *идей* психологии, которые играют заметную роль в деятельности инженера, врача, учителя, космонавта, благодаря которым стали возможны и эффективная психотерапия, и эффективное управление людьми, и, к сожалению, манипуляции.

Быть может, наше сегодняшнее знание не сделало нас счастливее (ибо сказано: «во многой мудрости много печали»), но знание это необратимо, – оно элемент *культуры* психолога. Поразительно и необъяснимо, каким образом чтение хороших книг – процесс нематериальный – неузнаваемо меняет весь облик человека: его речь, улыбку, выражение лица и глаз, даже походку и жесты. Совокупность знаний, которую мы сегодня относим к области математической психологии, настолько изменила образ мыслей и систему ценностей цивилизованных психологов, что в XXI веке уже ни у кого не возникает сомнений, является ли психология наукой. Вместе с тем, еще более отчетливо стало понятно, что Психология – это, прежде всего, Искусство.

[1] Цит. по: *Степанов С.С.* Психология в лицах / С.С. Степанов. – М., 2001. – С. 15.

Парадокс заключается в том, что настоящее искусство невозможно без самой строгой науки, а метод открытия глубоких научных истин лишь отчасти принадлежит науке и в значительной мере лежит в сфере искусства! Любой актер понимает, что ему не достигнуть вершин мастерства, если предварительно он не овладеет наукой дикции, мимики и жеста. И лишь потом (если он талантлив!) он сможет из этих простых и понятных элементов неведомым ему самому способом создать нечто неповторимое и удивительное. Точно также ученый, даже овладевший ремеслом психолога, еще не психолог, если он доверяет только логике. Все глубокие истины психологической науки парадоксальны при своем рождении, и нельзя достигнуть их, опираясь лишь на логику и опыт. Но… не надо забывать, что всегда существует предел, который не позволяет постигнуть науку единым порывом вдохновения.

Существует очевидная дополнительность методов науки и искусства в процессе познания внутренней реальности, и нет смысла спорить, какая рука важнее – левая или правая, хотя развиваются и работают они поразному. Рабочий метод науки – это *анализ* фактов и выяснение их причин, стремление отыскать закон в «превращениях случая». В искусстве преобладает бессознательный *синтез*, который в тех же «превращениях случая» находит единственное и неповторимое.

Я хотел бы, чтобы все, кто дочитал мой труд до конца, разделили со мной ту радость и то удивление, которые я сам когда-то испытал, открывая для себя необычный и удивительный математический мир, помогающий в овладении искусством проведения научного исследования.

Хочу выразить признательность моим коллегам, с которыми в течение многих лет работаю на отделении психологии факультета философии и психологии ВГУ, и, конечно же, я благодарен своим студентам, которые с пониманием относятся к очень не легкому для них предмету «Математические методы в психологии». И еще, я надеюсь, я смог помочь: одним – избавиться от страхов получения нового знания, другим – в овладении опорой, третьим – почувствовать красоту и неповторимость психологических феноменов, а кому-то – понять свое место и предназначение в психологической науке.

Желаю всем читателям успехов в овладении искусством научного психологического исследования.

М.А. Харченко

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

I. Квантили нормированного распределения z_P

P	**Тысячные доли *P***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,00	– ∞	–3,090	–2,878	–2,748	–2,652	**–2,576**	–2,512	–2,457	–2,409	–2,366
0,01	–2,326	–2,290	–2,257	–2,226	–2,197	**–2,170**	–2,144	–2,120	–2,097	–2,075
0,02	–2,054	–2,034	–2,014	–1,995	–1,977	**–1,960**	–1,943	–1,927	–1,911	–1,896
0,03	–1,881	–1,866	–1,852	–1,838	–1,825	**–1,812**	–1,799	–1,787	–1,774	–1,762
0,04	–1,751	–1,739	–1,728	–1,717	–1,706	**–1,695**	–1,685	–1,675	–1,665	–1,655
0,05	–1,645	–1,635	–1,626	–1,616	–1,607	**–1,598**	–1,589	–1,580	–1,572	–1,563
0,06	–1,555	–1,546	–1,538	–1,530	–1,522	**–1,514**	–1,506	–1,499	–1,491	–1,483
0,07	–1,476	–1,468	–1,461	–1,454	–1,447	**–1,440**	–1,433	–1,426	–1,419	–1,412
0,08	–1,405	–1,398	–1,392	–1,385	–1,379	**–1,372**	–1,366	–1,359	–1,353	–1,347
0,09	–1,341	–1,335	–1,329	–1,323	–1,317	**–1,311**	–1,305	–1,299	–1,293	–1,287
0,10	**–1,282**	**–1,276**	**–1,270**	**–1,265**	**–1,259**	**–1,254**	**–1,248**	**–1,243**	**–1,237**	**–1,232**
0,11	–1,227	–1,221	–1,216	–1,211	–1,206	**–1,200**	–1,195	–1,190	–1,185	–1,180
0,12	–1,175	–1,170	–1,165	–1,160	–1,155	**–1,150**	–1,146	–1,141	–1,136	–1,131
0,13	–1,126	–1,122	–1,117	–1,112	–1,108	**–1,103**	–1,098	–1,094	–1,089	–1,085
0,14	–1,080	–1,076	–1,071	–1,067	–1,063	**–1,058**	–1,054	–1,049	–1,045	–1,041
0,15	–1,036	–1,032	–1,028	–1,024	–1,019	**–1,015**	–1,011	–1,007	–1,003	–0,999
0,16	–0,994	–0,990	–0,986	–0,982	–0,978	**–0,974**	–0,970	–0,966	–0,962	–0,958
0,17	–0,954	–0,950	–0,946	–0,942	–0,938	**–0,935**	–0,931	–0,927	–0,923	–0,919
0,18	–0,915	–0,912	–0,908	–0,904	–0,900	**–0,896**	–0,893	–0,889	–0,885	–0,882
0,19	–0,878	–0,874	–0,871	–0,867	–0,863	**–0,860**	–0,856	–0,852	–0,849	–0,845
0,20	**–0,842**	**–0,838**	**–0,834**	**–0,831**	**–0,827**	**–0,824**	**–0,820**	**–0,817**	**–0,813**	**–0,810**
0,21	–0,806	–0,803	–0,800	–0,796	–0,793	**–0,789**	–0,786	–0,782	–0,779	–0,776
0,22	–0,772	–0,769	–0,765	–0,762	–0,759	**–0,755**	–0,752	–0,749	–0,745	–0,742
0,23	–0,739	–0,736	–0,732	–0,729	–0,726	**–0,722**	–0,719	–0,716	–0,713	–0,710
0,24	–0,706	–0,703	–0,700	–0,697	–0,693	**–0,690**	–0,687	–0,684	–0,681	–0,678
0,25	–0,674	–0,671	–0,668	–0,665	–0,662	**–0,659**	–0,656	–0,653	–0,650	–0,646
0,26	–0,643	–0,640	–0,637	–0,634	–0,631	**–0,628**	–0,625	–0,622	–0,619	–0,616
0,27	–0,613	–0,610	–0,607	–0,604	–0,601	**–0,598**	–0,595	–0,592	–0,589	–0,586
0,28	–0,583	–0,580	–0,577	–0,574	–0,571	**–0,568**	–0,565	–0,562	–0,559	–0,556
0,29	–0,553	–0,550	–0,548	–0,545	–0,542	**–0,539**	–0,536	–0,533	–0,530	–0,527
0,30	**–0,524**	**–0,522**	**–0,519**	**–0,516**	**–0,513**	**–0,510**	**–0,507**	**–0,504**	**–0,502**	**–0,499**
0,31	–0,496	–0,493	–0,490	–0,487	–0,485	**–0,482**	–0,479	–0,476	–0,473	–0,470
0,32	–0,468	–0,465	–0,462	–0,459	–0,457	**–0,454**	–0,451	–0,448	–0,445	–0,443
0,33	–0,440	–0,437	–0,434	–0,432	–0,429	**–0,426**	–0,423	–0,421	–0,418	–0,415
0,34	–0,412	–0,410	–0,407	–0,404	–0,402	**–0,399**	–0,396	–0,393	–0,391	–0,388
0,35	–0,385	–0,383	–0,380	–0,377	–0,375	**–0,372**	–0,369	–0,366	–0,364	–0,361
0,36	–0,358	–0,356	–0,353	–0,350	–0,348	**–0,345**	–0,342	–0,340	–0,337	–0,335
0,37	–0,332	–0,329	–0,327	–0,324	–0,321	**–0,319**	–0,316	–0,313	–0,311	–0,308
0,38	–0,305	–0,303	–0,300	–0,298	–0,295	**–0,292**	–0,290	–0,287	–0,285	–0,282
0,39	–0,279	–0,277	–0,274	–0,272	–0,269	**–0,266**	–0,264	–0,261	–0,259	–0,256
0,40	**–0,253**	**–0,251**	**–0,248**	**–0,246**	**–0,243**	**–0,240**	**–0,238**	**–0,235**	**–0,233**	**–0,230**
0,41	–0,228	–0,225	–0,222	–0,220	–0,217	**–0,215**	–0,212	–0,210	–0,207	–0,204
0,42	–0,202	–0,199	–0,197	–0,194	–0,192	**–0,189**	–0,187	–0,184	–0,181	–0,179
0,43	–0,176	–0,174	–0,171	–0,169	–0,166	**–0,164**	–0,161	–0,159	–0,156	–0,154

P	**Тысячные доли *P***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,44	–0,151	–0,148	–0,146	–0,143	–0,141	**–0,138**	–0,136	–0,133	–0,131	–0,128
0,45	–0,126	–0,123	–0,121	–0,118	–0,116	**–0,113**	–0,111	–0,108	–0,105	–0,103
0,46	–0,100	–0,098	–0,095	–0,093	–0,090	**–0,088**	–0,085	–0,083	–0,080	–0,078
0,47	–0,075	–0,073	–0,070	–0,068	–0,065	**–0,063**	–0,060	–0,058	–0,055	–0,053
0,48	–0,050	–0,048	–0,045	–0,043	–0,040	**–0,038**	–0,035	–0,033	–0,030	–0,028
0,49	–0,025	–0,023	–0,020	–0,018	–0,015	**–0,013**	–0,010	–0,008	–0,005	–0,003
0,50	**0**	**0,003**	**0,005**	**0,008**	**0,010**	**0,013**	**0,015**	**0,018**	**0,020**	**0,023**
0,51	0,025	0,028	0,030	0,033	0,035	**0,038**	0,040	0,043	0,045	0,048
0,52	0,050	0,053	0,055	0,058	0,060	**0,063**	0,065	0,068	0,070	0,073
0,53	0,075	0,078	0,080	0,083	0,085	**0,088**	0,090	0,093	0,095	0,098
0,54	0,100	0,103	0,105	0,108	0,111	**0,113**	0,116	0,118	0,121	0,123
0,55	0,126	0,128	0,131	0,133	0,136	**0,138**	0,141	0,143	0,146	0,148
0,56	0,151	0,154	0,156	0,159	0,161	**0,164**	0,166	0,169	0,171	0,174
0,57	0,176	0,179	0,181	0,184	0,187	**0,189**	0,192	0,194	0,197	0,199
0,58	0,202	0,204	0,207	0,210	0,212	**0,215**	0,217	0,220	0,222	0,225
0,59	0,228	0,230	0,233	0,235	0,238	**0,240**	0,243	0,246	0,248	0,251
0,60	**0,253**	**0,256**	**0,259**	**0,261**	**0,264**	**0,266**	**0,269**	**0,272**	**0,274**	**0,277**
0,61	0,279	0,282	0,285	0,287	0,290	**0,292**	0,295	0,298	0,300	0,303
0,62	0,305	0,308	0,311	0,313	0,316	**0,319**	0,321	0,324	0,327	0,329
0,63	0,332	0,335	0,337	0,340	0,342	**0,345**	0,348	0,350	0,353	0,356
0,64	0,358	0,361	0,364	0,366	0,369	**0,372**	0,375	0,377	0,380	0,383
0,65	0,385	0,388	0,391	0,393	0,396	**0,399**	0,402	0,404	0,407	0,410
0,66	0,412	0,415	0,418	0,421	0,423	**0,426**	0,429	0,432	0,434	0,437
0,67	0,440	0,443	0,445	0,448	0,451	**0,454**	0,457	0,459	0,462	0,465
0,68	0,468	0,470	0,473	0,476	0,479	**0,482**	0,485	0,487	0,490	0,493
0,69	0,496	0,499	0,502	0,504	0,507	**0,510**	0,513	0,516	0,519	0,522
0,70	**0,524**	**0,527**	**0,530**	**0,533**	**0,536**	**0,539**	**0,542**	**0,545**	**0,548**	**0,550**
0,71	0,553	0,556	0,559	0,562	0,565	**0,568**	0,571	0,574	0,577	0,580
0,72	0,583	0,586	0,589	0,592	0,595	**0,598**	0,601	0,604	0,607	0,610
0,73	0,613	0,616	0,619	0,622	0,625	**0,628**	0,631	0,634	0,637	0,640
0,74	0,643	0,646	0,650	0,653	0,656	**0,659**	0,662	0,665	0,668	0,671
0,75	0,674	0,678	0,681	0,684	0,687	**0,690**	0,693	0,697	0,700	0,703
0,76	0,706	0,710	0,713	0,716	0,719	**0,722**	0,726	0,729	0,732	0,736
0,77	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	**0,755**	0,759	0,762	0,765	0,769
0,78	0,772	0,776	0,779	0,782	0,786	**0,789**	0,793	0,796	0,800	0,803
0,79	0,806	0,810	0,813	0,817	0,820	**0,824**	0,827	0,831	0,834	0,838
0,80	**0,842**	**0,845**	**0,849**	**0,852**	**0,856**	**0,860**	**0,863**	**0,867**	**0,871**	**0,874**
0,81	0,878	0,882	0,885	0,889	0,893	**0,896**	0,900	0,904	0,908	0,912
0,82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	**0,935**	0,938	0,942	0,946	0,950
0,83	0,954	0,958	0,962	0,966	0,970	**0,974**	0,978	0,982	0,986	0,990
0,84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	**1,015**	1,019	1,024	1,028	1,032
0,85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	**1,058**	1,063	1,067	1,071	1,076
0,86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	**1,103**	1,108	1,112	1,117	1,122
0,87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	**1,150**	1,155	1,160	1,165	1,170
0,88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	**1,200**	1,206	1,211	1,216	1,221
0,89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	**1,254**	1,259	1,265	1,270	1,276
0,90	**1,282**	**1,287**	**1,293**	**1,299**	**1,305**	**1,311**	**1,317**	**1,323**	**1,329**	**1,335**
0,91	1,341	1,347	1,353	1,359	1,366	**1,372**	1,379	1,385	1,392	1,398
0,92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	**1,440**	1,447	1,454	1,461	1,468
0,93	1,476	1,483	1,491	1,499	1,506	**1,514**	1,522	1,530	1,538	1,546
0,94	1,555	1,563	1,572	1,580	1,589	**1,598**	1,607	1,616	1,626	1,635
0,95	1,645	1,655	1,665	1,675	1,685	**1,695**	1,706	1,717	1,728	1,739
0,96	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	**1,812**	1,825	1,838	1,852	1,866
0,97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	**1,960**	1,977	1,995	2,014	2,034
0,98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	**2,170**	2,197	2,226	2,257	2,290
0,99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	**2,576**	2,652	2,748	2,878	3,090

II. Критические значения распределения Стьюдента $t_{\alpha}(df)$

df	*α*		*df*	*α*		*df*	*α*		*df*	*α*		*df*	*α*	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**
1	12,706	63,656	23	2,069	2,807	45	2,014	2,690	67	1,996	2,651	**89**	**1,987**	**2,632**
2	4,303	9,925	**24**	**2,064**	**2,797**	46	2,013	2,687	68	1,995	2,650	90	1,987	2,632
3	3,182	5,841	25	2,060	2,787	47	2,012	2,685	**69**	**1,995**	**2,649**	91	1,986	2,631
4	**2,776**	**4,604**	26	2,056	2,779	48	2,011	2,682	70	1,994	2,648	92	1,986	2,630
5	2,571	4,032	27	2,052	2,771	**49**	**2,010**	**2,680**	71	1,994	2,647	93	1,986	2,630
6	2,447	3,707	28	2,048	2,763	50	2,009	2,678	72	1,993	2,646	**94**	**1,986**	**2,629**
7	2,365	3,499	**29**	**2,045**	**2,756**	51	2,008	2,676	73	1,993	2,645	95	1,985	2,629
8	2,306	3,355	30	2,042	2,750	52	2,007	2,674	**74**	**1,993**	**2,644**	96	1,985	2,628
9	**2,262**	**3,250**	31	2,040	2,744	53	2,006	2,672	75	1,992	2,643	97	1,985	2,627
10	2,228	3,169	32	2,037	2,738	**54**	**2,005**	**2,670**	76	1,992	2,642	98	1,984	2,627
11	2,201	3,106	33	2,035	2,733	55	2,004	2,668	77	1,991	2,641	**99**	**1,984**	**2,626**
12	2,179	3,055	**34**	**2,032**	**2,728**	56	2,003	2,667	78	1,991	2,640	119	1,980	2,618
13	2,160	3,012	35	2,030	2,724	57	2,002	2,665	**79**	**1,990**	**2,639**	149	1,976	2,609
14	**2,145**	**2,977**	36	2,028	2,719	58	2,002	2,663	80	1,990	2,639	199	1,972	2,601
15	2,131	2,947	37	2,026	2,715	**59**	**2,001**	**2,662**	81	1,990	2,638	299	1,968	2,592
16	2,120	2,921	38	2,024	2,712	60	2,000	2,660	82	1,989	2,637	399	1,966	2,588
17	2,110	2,898	**39**	**2,023**	**2,708**	61	2,000	2,659	83	1,989	2,636	**499**	**1,965**	**2,586**
18	2,101	2,878	40	2,021	2,704	62	1,999	2,657	**84**	**1,989**	**2,636**	599	1,964	2,584
19	**2,093**	**2,861**	41	2,020	2,701	63	1,998	2,656	85	1,988	2,635	699	1,963	2,583
20	2,086	2,845	42	2,018	2,698	**64**	**1,998**	**2,655**	86	1,988	2,634	799	1,963	2,582
21	2,080	2,831	43	2,017	2,695	65	1,997	2,654	87	1,988	2,634	899	1,963	2,581
22	2,074	2,819	**44**	**2,015**	**2,692**	66	1,997	2,652	88	1,987	2,633	∞	**1,960**	**2,576**

III. Критические значения распределения $\chi_{\alpha}^{2}(df)$

df	*α*								
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**		**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**
1	3,841	5,024	6,635	7,879		0,000039	0,000157	0,000982	0,003932
2	5,991	7,378	9,210	10,597		0,010	0,020	0,051	0,103
3	7,815	9,348	11,345	12,838		0,072	0,115	0,216	0,352
4	**9,488**	**11,143**	**13,277**	**14,860**		**0,207**	**0,297**	**0,484**	**0,711**
5	11,070	12,832	15,086	16,750		0,412	0,554	0,831	1,145
6	12,592	14,449	16,812	18,548		0,676	0,872	1,237	1,635
7	14,067	16,013	18,475	20,278		0,989	1,239	1,690	2,167
8	15,507	17,535	20,090	21,955		1,344	1,647	2,180	2,733
9	**16,919**	**19,023**	**21,666**	**23,589**		**1,735**	**2,088**	**2,700**	**3,325**
10	18,307	20,483	23,209	25,188		2,156	2,558	3,247	3,940
11	19,675	21,920	24,725	26,757		2,603	3,053	3,816	4,575
12	21,026	23,337	26,217	28,300		3,074	3,571	4,404	5,226
13	22,362	24,736	27,688	29,819		3,565	4,107	5,009	5,892
14	**23,685**	**26,119**	**29,141**	**31,319**		**4,075**	**4,660**	**5,629**	**6,571**
15	24,996	27,488	30,578	32,801		4,601	5,229	6,262	7,261
16	26,296	28,845	32,000	34,267		5,142	5,812	6,908	7,962
17	27,587	30,191	33,409	35,718		5,697	6,408	7,564	8,672
18	28,869	31,526	34,805	37,156		6,265	7,015	8,231	9,390
19	**30,144**	**32,852**	**36,191**	**38,582**		**6,844**	**7,633**	**8,907**	**10,117**
20	31,410	34,170	37,566	39,997		7,434	8,260	9,591	10,851
21	32,671	35,479	38,932	41,401		8,034	8,897	10,283	11,591
22	33,924	36,781	40,289	42,796		8,643	9,542	10,982	12,338
23	35,172	38,076	41,638	44,181		9,260	10,196	11,689	13,091
24	**36,415**	**39,364**	**42,980**	**45,558**		**9,886**	**10,856**	**12,401**	**13,848**
25	37,652	40,646	44,314	46,928		10,520	11,524	13,120	14,611
26	38,885	41,923	45,642	48,290		11,160	12,198	13,844	15,379
27	40,113	43,195	46,963	49,645		11,808	12,878	14,573	16,151

df	*α*								
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**		**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**
28	41,337	44,461	48,278	50,994		12,461	13,565	15,308	16,928
29	**42,557**	**45,722**	**49,588**	**52,335**		**13,121**	**14,256**	**16,047**	**17,708**
30	43,773	46,979	50,892	53,672		13,787	14,953	16,791	18,493
31	44,985	48,232	52,191	55,002		14,458	15,655	17,539	19,281
32	46,194	49,480	53,486	56,328		15,134	16,362	18,291	20,072
33	47,400	50,725	54,775	57,648		15,815	17,073	19,047	20,867
34	**48,602**	**51,966**	**56,061**	**58,964**		**16,501**	**17,789**	**19,806**	**21,664**
35	49,802	53,203	57,342	60,275		17,192	18,509	20,569	22,465
36	50,998	54,437	58,619	61,581		17,887	19,233	21,336	23,269
37	52,192	55,668	59,893	62,883		18,586	19,960	22,106	24,075
38	53,384	56,895	61,162	64,181		19,289	20,691	22,878	24,884
39	**54,572**	**58,120**	**62,428**	**65,475**		**19,996**	**21,426**	**23,654**	**25,695**
40	55,758	59,342	63,691	66,766		20,707	22,164	24,433	26,509
41	56,942	60,561	64,950	68,053		21,421	22,906	25,215	27,326
42	58,124	61,777	66,206	69,336		22,138	23,650	25,999	28,144
43	59,304	62,990	67,459	70,616		22,860	24,398	26,785	28,965
44	**60,481**	**64,201**	**68,710**	**71,892**		**23,584**	**25,148**	**27,575**	**29,787**
45	61,656	65,410	69,957	73,166		24,311	25,901	28,366	30,612
46	62,830	66,616	71,201	74,437		25,041	26,657	29,160	31,439
47	64,001	67,821	72,443	75,704		25,775	27,416	29,956	32,268
48	65,171	69,023	73,683	76,969		26,511	28,177	30,754	33,098
49	**66,339**	**70,222**	**74,919**	**78,231**		**27,249**	**28,941**	**31,555**	**33,930**
50	67,505	71,420	76,154	79,490		27,991	29,707	32,357	34,764
51	68,669	72,616	77,386	80,746		28,735	30,475	33,162	35,600
52	69,832	73,810	78,616	82,001		29,481	31,246	33,968	36,437
53	70,993	75,002	79,843	83,253		30,230	32,019	34,776	37,276
54	**72,153**	**76,192**	**81,069**	**84,502**		**30,981**	**32,793**	**35,586**	**38,116**
55	73,311	77,380	82,292	85,749		31,735	33,571	36,398	38,958
56	74,468	78,567	83,514	86,994		32,491	34,350	37,212	39,801
57	75,624	79,752	84,733	88,237		33,248	35,131	38,027	40,646
58	76,778	80,936	85,950	89,477		34,008	35,914	38,844	41,492
59	**77,930**	**82,117**	**87,166**	**90,715**		**34,770**	**36,698**	**39,662**	**42,339**
60	79,082	83,298	88,379	91,952		35,534	37,485	40,482	43,188
61	80,232	84,476	89,591	93,186		36,300	38,273	41,303	44,038
62	81,381	85,654	90,802	94,419		37,068	39,063	42,126	44,889
63	82,529	86,830	92,010	95,649		37,838	39,855	42,950	45,741
64	**83,675**	**88,004**	**93,217**	**96,878**		**38,610**	**40,649**	**43,776**	**46,595**
65	84,821	89,177	94,422	98,105		39,383	41,444	44,603	47,450
66	85,965	90,349	95,626	99,330		40,158	42,240	45,431	48,305
67	87,108	91,519	96,828	100,55		40,935	43,038	46,261	49,162
68	88,250	92,688	98,028	101,78		41,714	43,838	47,092	50,020
69	**89,391**	**93,856**	**99,227**	**102,99**		**42,493**	**44,639**	**47,924**	**50,879**
70	90,531	95,023	100,43	104,21		43,275	45,442	48,758	51,739
71	91,670	96,189	101,62	105,43		44,058	46,246	49,592	52,600
72	92,808	97,353	102,82	106,65		44,843	47,051	50,428	53,462
73	93,945	98,516	104,01	107,86		45,629	47,858	51,265	54,325
74	**95,081**	**99,678**	**105,20**	**109,07**		**46,417**	**48,666**	**52,103**	**55,189**
75	96,217	100,84	106,39	110,29		47,206	49,475	52,942	56,054
76	97,351	102,00	107,58	111,50		47,997	50,286	53,782	56,920
77	98,484	103,16	108,77	112,70		48,788	51,097	54,623	57,786
78	99,617	104,32	109,96	113,91		49,581	51,910	55,466	58,654
79	**100,75**	**105,47**	**111,14**	**115,12**		**50,376**	**52,725**	**56,309**	**59,522**
80	101,88	106,63	112,33	116,32		51,172	53,540	57,153	60,391
81	103,01	107,78	113,51	117,52		51,969	54,357	57,998	61,262
82	104,14	108,94	114,69	118,73		52,767	55,174	58,845	62,132
83	105,27	110,09	115,88	119,93		53,567	55,993	59,692	63,004

df	α								
	0,05	0,025	0,01	0,005		0,995	0,99	0,975	0,95
84	**106,39**	**111,24**	**117,06**	**121,13**		**54,368**	**56,813**	**60,540**	**63,876**
85	107,52	112,39	118,24	122,32		55,170	57,634	61,389	64,749
86	108,65	113,54	119,41	123,52		55,973	58,456	62,239	65,623
87	109,77	114,69	120,59	124,72		56,777	59,279	63,089	66,498
88	110,90	115,84	121,77	125,91		57,582	60,103	63,941	67,373
89	**112,02**	**116,99**	**122,94**	**127,11**		**58,389**	**60,928**	**64,793**	**68,249**
90	113,15	118,14	124,12	128,30		59,196	61,754	65,647	69,126
91	114,27	119,28	125,29	129,49		60,005	62,581	66,501	70,003
92	115,39	120,43	126,46	130,68		60,815	63,409	67,356	70,882
93	116,51	121,57	127,63	131,87		61,625	64,238	68,211	71,760
94	**117,63**	**122,72**	**128,80**	**133,06**		**62,437**	**65,068**	**69,068**	**72,640**
95	118,75	123,86	129,97	134,25		63,250	65,898	69,925	73,520
96	119,87	125,00	131,14	135,43		64,063	66,730	70,783	74,401
97	120,99	126,14	132,31	136,62		64,878	67,562	71,642	75,282
98	122,11	127,28	133,48	137,80		65,693	68,396	72,501	76,164
99	**123,23**	**128,42**	**134,64**	**138,99**		**66,510**	**69,230**	**73,361**	**77,046**
100	124,34	129,56	135,81	140,17		67,328	70,065	74,222	77,929
101	125,46	130,70	136,97	141,35		68,146	70,901	75,084	78,813
102	126,57	131,84	138,13	142,53		68,965	71,737	75,946	79,697
103	127,69	132,97	139,30	143,71		69,785	72,575	76,809	80,582
104	**128,80**	**134,11**	**140,46**	**144,89**		**70,606**	**73,413**	**77,672**	**81,468**
105	129,92	135,25	141,62	146,07		71,428	74,252	78,536	82,354
106	131,03	136,38	142,78	147,25		72,251	75,092	79,401	83,240
107	132,14	137,52	143,94	148,42		73,074	75,932	80,267	84,127
108	133,26	138,65	145,10	149,60		73,899	76,774	81,133	85,015
109	**134,37**	**139,78**	**146,26**	**150,77**		**74,724**	**77,616**	**82,000**	**85,903**
110	135,48	140,92	147,41	151,95		75,550	78,458	82,867	86,792
111	136,59	142,05	148,57	153,12		76,377	79,302	83,735	87,681
112	137,70	143,18	149,73	154,29		77,204	80,146	84,604	88,570
113	138,81	144,31	150,88	155,47		78,033	80,991	85,473	89,460
114	**139,92**	**145,44**	**152,04**	**156,64**		**78,862**	**81,836**	**86,342**	**90,351**
115	141,03	146,57	153,19	157,81		79,691	82,682	87,213	91,242
116	142,14	147,70	154,34	158,98		80,522	83,529	88,084	92,134
117	143,25	148,83	155,50	160,15		81,353	84,377	88,955	93,026
118	144,35	149,96	156,65	161,31		82,185	85,225	89,827	93,918
119	**145,46**	**151,08**	**157,80**	**162,48**		**83,018**	**86,074**	**90,700**	**94,811**
129	156,51	162,33	169,28	174,12		91,382	94,596	99,453	103,76
139	167,51	173,53	180,70	185,69		99,809	103,17	108,25	112,76
149	**178,49**	**184,69**	**192,07**	**197,21**		**108,29**	**111,80**	**117,10**	**121,79**
159	189,42	195,81	203,40	208,68		116,82	120,48	125,98	130,85
169	200,33	206,89	214,69	220,10		125,40	129,19	134,90	139,94
179	211,22	217,94	225,93	231,48		134,02	137,94	143,84	149,06
189	222,08	228,96	237,15	242,83		142,68	146,73	152,82	158,20
199	**232,91**	**239,96**	**248,33**	**254,13**		**151,37**	**155,55**	**161,83**	**167,36**
249	286,81	294,60	303,84	310,23		195,28	200,04	207,19	213,47
299	340,33	348,79	358,81	365,74		239,77	245,07	252,99	259,95
349	393,56	402,65	413,39	420,80		284,71	290,49	299,14	306,71
399	446,57	456,24	467,64	475,52		329,99	336,24	345,55	353,70
499	**552,07**	**562,79**	**575,42**	**584,12**		**421,38**	**428,46**	**439,00**	**448,20**
599	657,05	668,71	682,45	691,91		513,60	521,43	533,08	543,23
699	761,62	774,16	788,91	799,06		606,45	614,97	627,63	638,66
799	865,87	879,23	894,93	905,72		699,79	708,95	722,56	734,40
899	969,86	983,99	1000,6	1012,0		793,54	803,31	817,80	830,41
999	**1073,6**	**1088,5**	**1105,9**	**1117,9**		**887,62**	**897,96**	**913,30**	**926,63**

IV. Критические значения распределения Фишера $F_\alpha(df_1, df_2)$

df_2	**Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1**																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	α = 0,05																			
1	161	199	216	**225**	230	234	237	239	**241**	242	243	244	245	**245**	246	246	247	247	**248**	248
2	18,51	19,00	19,16	**19,25**	19,30	19,33	19,35	19,37	**19,38**	19,40	19,40	19,41	19,42	**19,42**	19,43	19,43	19,44	19,44	**19,44**	19,45
3	10,13	9,552	9,277	**9,117**	9,013	8,941	8,887	8,845	**8,812**	8,785	8,763	8,745	8,729	**8,715**	8,703	8,692	8,683	8,675	**8,667**	8,660
4	7,709	6,944	6,591	**6,388**	6,256	6,163	6,094	6,041	**5,999**	5,964	5,936	5,912	5,891	**5,873**	5,858	5,844	5,832	5,821	**5,811**	5,803
5	6,608	5,786	5,409	**5,192**	5,050	4,950	4,876	4,818	**4,772**	4,735	4,704	4,678	4,655	**4,636**	4,619	4,604	4,590	4,579	**4,568**	4,558
6	5,987	5,143	4,757	**4,534**	4,387	4,284	4,207	4,147	**4,099**	4,060	4,027	4,000	3,976	**3,956**	3,938	3,922	3,908	3,896	**3,884**	3,874
7	5,591	4,737	4,347	**4,120**	3,972	3,866	3,787	3,726	**3,677**	3,637	3,603	3,575	3,550	**3,529**	3,511	3,494	3,480	3,467	**3,455**	3,445
8	5,318	4,459	4,066	**3,838**	3,688	3,581	3,500	3,438	**3,388**	3,347	3,313	3,284	3,259	**3,237**	3,218	3,202	3,187	3,173	**3,161**	3,150
9	**5,117**	**4,256**	**3,863**	**3,633**	**3,482**	**3,374**	**3,293**	**3,230**	**3,179**	**3,137**	**3,102**	**3,073**	**3,048**	**3,025**	**3,006**	**2,989**	**2,974**	**2,960**	**2,948**	**2,936**
10	4,965	4,103	3,708	**3,478**	3,326	3,217	3,135	3,072	**3,020**	2,978	2,943	2,913	2,887	**2,865**	2,845	2,828	2,812	2,798	**2,785**	2,774
11	4,844	3,982	3,587	**3,357**	3,204	3,095	3,012	2,948	**2,896**	2,854	2,818	2,788	2,761	**2,739**	2,719	2,701	2,685	2,671	**2,658**	2,646
12	4,747	3,885	3,490	**3,259**	3,106	2,996	2,913	2,849	**2,796**	2,753	2,717	2,687	2,660	**2,637**	2,617	2,599	2,583	2,568	**2,555**	2,544
13	4,667	3,806	3,411	**3,179**	3,025	2,915	2,832	2,767	**2,714**	2,671	2,635	2,604	2,577	**2,554**	2,533	2,515	2,499	2,484	**2,471**	2,459
14	4,600	3,739	3,344	**3,112**	2,958	2,848	2,764	2,699	**2,646**	2,602	2,565	2,534	2,507	**2,484**	2,463	2,445	2,428	2,413	**2,400**	2,388
15	4,543	3,682	3,287	**3,056**	2,901	2,790	2,707	2,641	**2,588**	2,544	2,507	2,475	2,448	**2,424**	2,403	2,385	2,368	2,353	**2,340**	2,328
	α = 0,01																			
1	4052	4999	5404	**5624**	5764	5859	5928	5981	**6022**	6056	6083	6107	6126	**6143**	6157	6170	6181	6191	**6201**	6209
2	98,50	99,00	99,16	**99,25**	99,30	99,33	99,36	99,38	**99,39**	99,40	99,41	99,42	99,42	**99,43**	99,43	99,44	99,44	99,44	**99,45**	99,45
3	34,12	30,82	29,46	**28,71**	28,24	27,91	27,67	27,49	**27,34**	27,23	27,13	27,05	26,98	**26,92**	26,87	26,83	26,79	26,75	**26,72**	26,69
4	21,20	18,00	16,69	**15,98**	15,52	15,21	14,98	14,80	**14,66**	14,55	14,45	14,37	14,31	**14,25**	14,20	14,15	14,11	14,08	**14,05**	14,02
5	16,26	13,27	12,06	**11,39**	10,97	10,67	10,46	10,29	**10,16**	10,05	9,963	9,888	9,825	**9,770**	9,722	9,680	9,643	9,609	**9,580**	9,553
6	13,75	10,92	9,780	**9,148**	8,746	8,466	8,260	8,102	**7,976**	7,874	7,790	7,718	7,657	**7,605**	7,559	7,519	7,483	7,451	**7,422**	7,396
7	12,25	9,547	8,451	**7,847**	7,460	7,191	6,993	6,840	**6,719**	6,620	6,538	6,469	6,410	**6,359**	6,314	6,275	6,240	6,209	**6,181**	6,155
8	11,26	8,649	7,591	**7,006**	6,632	6,371	6,178	6,029	**5,911**	5,814	5,734	5,667	5,609	**5,559**	5,515	5,477	5,442	5,412	**5,384**	5,359
9	**10,56**	**8,022**	**6,992**	**6,422**	**6,057**	**5,802**	**5,613**	**5,467**	**5,351**	**5,257**	**5,178**	**5,111**	**5,055**	**5,005**	**4,962**	**4,924**	**4,890**	**4,860**	**4,833**	**4,808**
10	10,04	7,559	6,552	**5,994**	5,636	5,386	5,200	5,057	**4,942**	4,849	4,772	4,706	4,650	**4,601**	4,558	4,520	4,487	4,457	**4,430**	4,405
11	9,646	7,206	6,217	**5,668**	5,316	5,069	4,886	4,744	**4,632**	4,539	4,462	4,397	4,342	**4,293**	4,251	4,213	4,180	4,150	**4,123**	4,099
12	9,330	6,927	5,953	**5,412**	5,064	4,821	4,640	4,499	**4,388**	4,296	4,220	4,155	4,100	**4,052**	4,010	3,972	3,939	3,910	**3,883**	3,858
13	9,074	6,701	5,739	**5,205**	4,862	4,620	4,441	4,302	**4,191**	4,100	4,025	3,960	3,905	**3,857**	3,815	3,778	3,745	3,716	**3,689**	3,665
14	8,862	6,515	5,564	**5,035**	4,695	4,456	4,278	4,140	**4,030**	3,939	3,864	3,800	3,745	**3,698**	3,656	3,619	3,586	3,556	**3,529**	3,505
15	8,683	6,359	5,417	**4,893**	4,556	4,318	4,142	4,004	**3,895**	3,805	3,730	3,666	3,612	**3,564**	3,522	3,485	3,452	3,423	**3,396**	3,372

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	α = 0,05																			
16	4,494	3,634	3,239	**3,007**	2,852	2,741	2,657	2,591	**2,538**	2,494	2,456	2,425	2,397	**2,373**	2,352	2,333	2,317	2,302	**2,288**	2,276
17	4,451	3,592	3,197	**2,965**	2,810	2,699	2,614	2,548	**2,494**	2,450	2,413	2,381	2,353	**2,329**	2,308	2,289	2,272	2,257	**2,243**	2,230
18	4,414	3,555	3,160	**2,928**	2,773	2,661	2,577	2,510	**2,456**	2,412	2,374	2,342	2,314	**2,290**	2,269	2,250	2,233	2,217	**2,203**	2,191
19	**4,381**	**3,522**	**3,127**	**2,895**	**2,740**	**2,628**	**2,544**	**2,477**	**2,423**	**2,378**	**2,340**	**2,308**	**2,280**	**2,256**	**2,234**	**2,215**	**2,198**	**2,182**	**2,168**	**2,155**
20	4,351	3,493	3,098	**2,866**	2,711	2,599	2,514	2,447	**2,393**	2,348	2,310	2,278	2,250	**2,225**	2,203	2,184	2,167	2,151	**2,137**	2,124
21	4,325	3,467	3,072	**2,840**	2,685	2,573	2,488	2,420	**2,366**	2,321	2,283	2,250	2,222	**2,197**	2,176	2,156	2,139	2,123	**2,109**	2,096
22	4,301	3,443	3,049	**2,817**	2,661	2,549	2,464	2,397	**2,342**	2,297	2,259	2,226	2,198	**2,173**	2,151	2,131	2,114	2,098	**2,084**	2,071
23	4,279	3,422	3,028	**2,796**	2,640	2,528	2,442	2,375	**2,320**	2,275	2,236	2,204	2,175	**2,150**	2,128	2,109	2,091	2,075	**2,061**	2,048
24	4,260	3,403	3,009	**2,776**	2,621	2,508	2,423	2,355	**2,300**	2,255	2,216	2,183	2,155	**2,130**	2,108	2,088	2,070	2,054	**2,040**	2,027
25	4,242	3,385	2,991	**2,759**	2,603	2,490	2,405	2,337	**2,282**	2,236	2,198	2,165	2,136	**2,111**	2,089	2,069	2,051	2,035	**2,021**	2,007
26	4,225	3,369	2,975	**2,743**	2,587	2,474	2,388	2,321	**2,265**	2,220	2,181	2,148	2,119	**2,094**	2,072	2,052	2,034	2,018	**2,003**	1,990
27	4,210	3,354	2,960	**2,728**	2,572	2,459	2,373	2,305	**2,250**	2,204	2,166	2,132	2,103	**2,078**	2,056	2,036	2,018	2,002	**1,987**	1,974
28	4,196	3,340	2,947	**2,714**	2,558	2,445	2,359	2,291	**2,236**	2,190	2,151	2,118	2,089	**2,064**	2,041	2,021	2,003	1,987	**1,972**	1,959
29	**4,183**	**3,328**	**2,934**	**2,701**	**2,545**	**2,432**	**2,346**	**2,278**	**2,223**	**2,177**	**2,138**	**2,104**	**2,075**	**2,050**	**2,027**	**2,007**	**1,989**	**1,973**	**1,958**	**1,945**
34	4,130	3,276	2,883	**2,650**	2,494	2,380	2,294	2,225	**2,170**	2,123	2,084	2,050	2,021	**1,995**	1,972	1,952	1,933	1,917	**1,902**	1,888
39	4,091	3,238	2,845	**2,612**	2,456	2,342	2,255	2,187	**2,131**	2,084	2,044	2,010	1,981	**1,954**	1,931	1,911	1,892	1,875	**1,860**	1,846
	α = 0,01																			
16	8,531	6,226	5,292	**4,773**	4,437	4,202	4,026	3,890	**3,780**	3,691	3,616	3,553	3,498	**3,451**	3,409	3,372	3,339	3,310	**3,283**	3,259
17	8,400	6,112	5,185	**4,669**	4,336	4,101	3,927	3,791	**3,682**	3,593	3,518	3,455	3,401	**3,353**	3,312	3,275	3,242	3,212	**3,186**	3,162
18	8,285	6,013	5,092	**4,579**	4,248	4,015	3,841	3,705	**3,597**	3,508	3,434	3,371	3,316	**3,269**	3,227	3,190	3,158	3,128	**3,101**	3,077
19	**8,185**	**5,926**	**5,010**	**4,500**	**4,171**	**3,939**	**3,765**	**3,631**	**3,523**	**3,434**	**3,360**	**3,297**	**3,242**	**3,195**	**3,153**	**3,116**	**3,084**	**3,054**	**3,027**	**3,003**
20	8,096	5,849	4,938	**4,431**	4,103	3,871	3,699	3,564	**3,457**	3,368	3,294	3,231	3,177	**3,130**	3,088	3,051	3,018	2,989	**2,962**	2,938
21	8,017	5,780	4,874	**4,369**	4,042	3,812	3,640	3,506	**3,398**	3,310	3,236	3,173	3,119	**3,072**	3,030	2,993	2,960	2,931	**2,904**	2,880
22	7,945	5,719	4,817	**4,313**	3,988	3,758	3,587	3,453	**3,346**	3,258	3,184	3,121	3,067	**3,019**	2,978	2,941	2,908	2,879	**2,852**	2,827
23	7,881	5,664	4,765	**4,264**	3,939	3,710	3,539	3,406	**3,299**	3,211	3,137	3,074	3,020	**2,973**	2,931	2,894	2,861	2,832	**2,805**	2,780
24	7,823	5,614	4,718	**4,218**	3,895	3,667	3,496	3,363	**3,256**	3,168	3,094	3,032	2,977	**2,930**	2,889	2,852	2,819	2,789	**2,762**	2,738
25	7,770	5,568	4,675	**4,177**	3,855	3,627	3,457	3,324	**3,217**	3,129	3,056	2,993	2,939	**2,892**	2,850	2,813	2,780	2,751	**2,724**	2,699
26	7,721	5,526	4,637	**4,140**	3,818	3,591	3,421	3,288	**3,182**	3,094	3,021	2,958	2,904	**2,857**	2,815	2,778	2,745	2,715	**2,688**	2,664
27	7,677	5,488	4,601	**4,106**	3,785	3,558	3,388	3,256	**3,149**	3,062	2,988	2,926	2,872	**2,824**	2,783	2,746	2,713	2,683	**2,656**	2,632
28	7,636	5,453	4,568	**4,074**	3,754	3,528	3,358	3,226	**3,120**	3,032	2,959	2,896	2,842	**2,795**	2,753	2,716	2,683	2,653	**2,626**	2,602
29	**7,598**	**5,420**	**4,538**	**4,045**	**3,725**	**3,499**	**3,330**	**3,198**	**3,092**	**3,005**	**2,931**	**2,868**	**2,814**	**2,767**	**2,726**	**2,689**	**2,656**	**2,626**	**2,599**	**2,574**
34	7,444	5,289	4,416	**3,927**	3,611	3,386	3,218	3,087	**2,981**	2,894	2,821	2,758	2,704	**2,657**	2,615	2,578	2,545	2,515	**2,488**	2,463
39	7,333	5,194	4,327	**3,843**	3,528	3,305	3,137	3,006	**2,901**	2,814	2,741	2,678	2,624	**2,577**	2,535	2,498	2,465	2,434	**2,407**	2,382

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	$\alpha = 0{,}05$																			
44	4,062	3,209	2,816	**2,584**	2,427	2,313	2,226	2,157	**2,101**	2,054	2,014	1,980	1,950	**1,924**	1,900	1,879	1,861	1,844	**1,828**	1,814
49	**4,038**	**3,187**	**2,794**	**2,561**	**2,404**	**2,290**	**2,203**	**2,134**	**2,077**	**2,030**	**1,990**	**1,956**	**1,926**	**1,899**	**1,876**	**1,855**	**1,836**	**1,819**	**1,803**	**1,789**
54	4,020	3,168	2,776	**2,543**	2,386	2,272	2,185	2,115	**2,059**	2,011	1,971	1,936	1,906	**1,879**	1,856	1,835	1,816	1,798	**1,782**	1,768
59	4,004	3,153	2,761	**2,528**	2,371	2,257	2,169	2,100	**2,043**	1,995	1,955	1,920	1,890	**1,863**	1,839	1,818	1,799	1,781	**1,766**	1,751
64	3,991	3,140	2,748	**2,515**	2,358	2,244	2,156	2,087	**2,030**	1,982	1,942	1,907	1,876	**1,849**	1,826	1,804	1,785	1,767	**1,751**	1,737
69	3,980	3,130	2,737	**2,505**	2,348	2,233	2,145	2,076	**2,019**	1,971	1,930	1,895	1,865	**1,838**	1,814	1,792	1,773	1,755	**1,739**	1,725
74	3,970	3,120	2,728	**2,495**	2,338	2,224	2,136	2,066	**2,009**	1,961	1,921	1,885	1,855	**1,828**	1,804	1,782	1,763	1,745	**1,729**	1,714
79	3,962	3,112	2,720	**2,487**	2,330	2,216	2,128	2,058	**2,001**	1,953	1,912	1,877	1,846	**1,819**	1,795	1,773	1,754	1,736	**1,720**	1,705
84	3,955	3,105	2,713	**2,480**	2,323	2,209	2,121	2,051	**1,993**	1,945	1,905	1,869	1,838	**1,811**	1,787	1,765	1,746	1,728	**1,712**	1,697
89	3,948	3,099	2,707	**2,474**	2,317	2,202	2,114	2,044	**1,987**	1,939	1,898	1,863	1,832	**1,804**	1,780	1,758	1,739	1,721	**1,705**	1,690
99	**3,937**	**3,088**	**2,696**	**2,464**	**2,306**	**2,192**	**2,103**	**2,033**	**1,976**	**1,928**	**1,887**	**1,851**	**1,820**	**1,793**	**1,769**	**1,747**	**1,727**	**1,709**	**1,693**	**1,678**
109	3,928	3,080	2,688	**2,455**	2,298	2,183	2,095	2,024	**1,967**	1,919	1,878	1,842	1,811	**1,784**	1,759	1,737	1,717	1,699	**1,683**	1,668
119	3,921	3,072	2,681	**2,448**	2,290	2,176	2,087	2,017	**1,959**	1,911	1,870	1,834	1,803	**1,776**	1,751	1,729	1,709	1,691	**1,675**	1,659
129	3,915	3,066	2,675	**2,442**	2,284	2,170	2,081	2,011	**1,953**	1,905	1,864	1,828	1,797	**1,769**	1,745	1,722	1,703	1,684	**1,668**	1,652
139	3,909	3,061	2,670	**2,437**	2,279	2,164	2,076	2,006	**1,948**	1,899	1,858	1,822	1,791	**1,764**	1,739	1,717	1,697	1,679	**1,662**	1,647
149	3,905	3,057	2,665	**2,432**	2,275	2,160	2,072	2,001	**1,943**	1,895	1,853	1,818	1,786	**1,759**	1,734	1,712	1,692	1,673	**1,657**	1,641
	$\alpha = 0{,}01$																			
44	7,248	5,123	4,261	**3,778**	3,465	3,243	3,076	2,946	**2,840**	2,754	2,680	2,618	2,564	**2,516**	2,475	2,437	2,404	2,374	**2,346**	2,321
49	**7,182**	**5,066**	**4,208**	**3,728**	**3,416**	**3,195**	**3,029**	**2,898**	**2,793**	**2,706**	**2,633**	**2,571**	**2,517**	**2,469**	**2,427**	**2,390**	**2,356**	**2,326**	**2,299**	**2,274**
54	7,129	5,021	4,167	**3,688**	3,377	3,156	2,990	2,860	**2,755**	2,668	2,595	2,533	2,479	**2,431**	2,389	2,352	2,318	2,288	**2,260**	2,235
59	7,085	4,984	4,132	**3,655**	3,345	3,124	2,959	2,829	**2,724**	2,637	2,564	2,502	2,447	**2,400**	2,358	2,320	2,287	2,256	**2,229**	2,203
64	7,048	4,953	4,103	**3,627**	3,318	3,098	2,932	2,803	**2,698**	2,611	2,538	2,476	2,421	**2,374**	2,332	2,294	2,260	2,230	**2,202**	2,177
69	7,017	4,927	4,079	**3,604**	3,295	3,075	2,910	2,781	**2,676**	2,589	2,516	2,454	2,399	**2,352**	2,310	2,272	2,238	2,208	**2,180**	2,155
74	6,990	4,904	4,058	**3,584**	3,275	3,056	2,891	2,762	**2,657**	2,570	2,497	2,435	2,380	**2,333**	2,290	2,253	2,219	2,188	**2,161**	2,135
79	6,967	4,884	4,040	**3,566**	3,258	3,039	2,874	2,745	**2,640**	2,554	2,481	2,418	2,364	**2,316**	2,274	2,236	2,202	2,172	**2,144**	2,118
84	6,947	4,867	4,024	**3,551**	3,243	3,024	2,860	2,731	**2,626**	2,539	2,466	2,404	2,349	**2,302**	2,259	2,222	2,188	2,157	**2,129**	2,104
89	6,929	4,852	4,010	**3,538**	3,230	3,012	2,847	2,718	**2,613**	2,527	2,454	2,391	2,337	**2,289**	2,247	2,209	2,175	2,144	**2,116**	2,091
99	**6,898**	**4,826**	**3,986**	**3,515**	**3,208**	**2,990**	**2,825**	**2,696**	**2,592**	**2,505**	**2,432**	**2,369**	**2,315**	**2,267**	**2,225**	**2,187**	**2,153**	**2,122**	**2,094**	**2,069**
109	6,873	4,805	3,967	**3,496**	3,190	2,972	2,808	2,679	**2,574**	2,488	2,415	2,352	2,298	**2,250**	2,207	2,169	2,135	2,105	**2,076**	2,051
119	6,853	4,788	3,951	**3,481**	3,175	2,957	2,793	2,664	**2,560**	2,473	2,400	2,338	2,283	**2,235**	2,193	2,155	2,121	2,090	**2,062**	2,036
129	6,836	4,774	3,937	**3,468**	3,162	2,945	2,781	2,652	**2,548**	2,461	2,388	2,325	2,271	**2,223**	2,181	2,143	2,108	2,077	**2,049**	2,023
139	6,821	4,761	3,926	**3,457**	3,152	2,934	2,770	2,642	**2,537**	2,451	2,378	2,315	2,261	**2,213**	2,170	2,132	2,098	2,067	**2,039**	2,013
149	6,808	4,750	3,916	**3,448**	3,142	2,925	2,761	2,633	**2,528**	2,442	2,369	2,306	2,252	**2,204**	2,161	2,123	2,089	2,058	**2,030**	2,004

df_2	Число степеней свободы для бо́льшей дисперсии df_1																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	α = 0,05																			
159	3,901	3,053	2,661	**2,429**	2,271	2,156	2,068	1,997	**1,939**	1,891	1,849	1,814	1,782	**1,754**	1,730	1,707	1,687	1,669	**1,652**	1,637
169	3,897	3,049	2,658	**2,425**	2,268	2,153	2,064	1,994	**1,936**	1,887	1,846	1,810	1,778	**1,751**	1,726	1,704	1,684	1,665	**1,648**	1,633
179	3,894	3,046	2,655	**2,422**	2,265	2,150	2,061	1,990	**1,932**	1,884	1,842	1,807	1,775	**1,747**	1,723	1,700	1,680	1,662	**1,645**	1,630
189	3,891	3,044	2,652	**2,419**	2,262	2,147	2,058	1,988	**1,930**	1,881	1,840	1,804	1,772	**1,744**	1,720	1,697	1,677	1,659	**1,642**	1,626
199	**3,889**	**3,041**	**2,650**	**2,417**	**2,259**	**2,144**	**2,056**	**1,985**	**1,927**	**1,879**	**1,837**	**1,801**	**1,770**	**1,742**	**1,717**	**1,695**	**1,674**	**1,656**	**1,639**	**1,624**
249	3,879	3,032	2,641	**2,408**	2,250	2,135	2,046	1,976	**1,918**	1,869	1,827	1,791	1,760	**1,732**	1,707	1,684	1,664	1,645	**1,628**	1,613
299	3,873	3,026	2,635	**2,402**	2,244	2,129	2,040	1,969	**1,911**	1,862	1,821	1,785	1,753	**1,725**	1,700	1,677	1,657	1,638	**1,621**	1,606
349	3,868	3,022	2,630	**2,398**	2,240	2,125	2,036	1,965	**1,907**	1,858	1,816	1,780	1,748	**1,720**	1,695	1,673	1,652	1,633	**1,616**	1,601
399	3,865	3,018	2,627	**2,394**	2,237	2,121	2,033	1,962	**1,903**	1,854	1,813	1,776	1,745	**1,717**	1,692	1,669	1,648	1,630	**1,613**	1,597
499	**3,860**	**3,014**	**2,623**	**2,390**	**2,232**	**2,117**	**2,028**	**1,957**	**1,899**	**1,850**	**1,808**	**1,772**	**1,740**	**1,712**	**1,686**	**1,664**	**1,643**	**1,625**	**1,607**	**1,592**
599	3,857	3,011	2,620	**2,387**	2,229	2,114	2,025	1,954	**1,895**	1,846	1,805	1,768	1,737	**1,708**	1,683	1,660	1,640	1,621	**1,604**	1,588
699	3,855	3,009	2,618	**2,385**	2,227	2,112	2,023	1,952	**1,893**	1,844	1,802	1,766	1,734	**1,706**	1,681	1,658	1,637	1,619	**1,601**	1,586
799	3,853	3,007	2,616	**2,383**	2,225	2,110	2,021	1,950	**1,892**	1,843	1,801	1,764	1,732	**1,704**	1,679	1,656	1,636	1,617	**1,600**	1,584
899	3,852	3,006	2,615	**2,382**	2,224	2,109	2,020	1,949	**1,890**	1,841	1,799	1,763	1,731	**1,703**	1,678	1,655	1,634	1,615	**1,598**	1,582
999	3,851	3,005	2,614	**2,381**	2,223	2,108	2,019	1,948	**1,889**	1,840	1,798	1,762	1,730	**1,702**	1,676	1,654	1,633	1,614	**1,597**	1,581
∞	**3,841**	**2,996**	**2,605**	**2,372**	**2,214**	**2,099**	**2,010**	**1,938**	**1,880**	**1,831**	**1,789**	**1,752**	**1,720**	**1,692**	**1,666**	**1,644**	**1,623**	**1,604**	**1,587**	**1,571**
	α = 0,01																			
159	6,797	4,741	3,907	**3,439**	3,134	2,917	2,754	2,625	**2,521**	2,434	2,361	2,298	2,244	**2,196**	2,153	2,115	2,081	2,050	**2,022**	1,996
169	6,787	4,733	3,900	**3,432**	3,127	2,910	2,747	2,618	**2,514**	2,427	2,354	2,292	2,237	**2,189**	2,146	2,108	2,074	2,043	**2,015**	1,989
179	6,779	4,726	3,893	**3,426**	3,121	2,904	2,741	2,612	**2,508**	2,421	2,348	2,285	2,231	**2,183**	2,140	2,102	2,068	2,037	**2,008**	1,982
189	6,771	4,719	3,887	**3,420**	3,115	2,899	2,735	2,607	**2,502**	2,416	2,343	2,280	2,225	**2,177**	2,135	2,097	2,062	2,031	**2,003**	1,977
199	**6,764**	**4,713**	**3,882**	**3,415**	**3,110**	**2,894**	**2,730**	**2,602**	**2,498**	**2,411**	**2,338**	**2,275**	**2,221**	**2,173**	**2,130**	**2,092**	**2,057**	**2,026**	**1,998**	**1,972**
249	6,738	4,691	3,861	**3,395**	3,091	2,875	2,712	2,583	**2,479**	2,393	2,320	2,257	2,202	**2,154**	2,111	2,073	2,039	2,007	**1,979**	1,953
299	6,720	4,677	3,848	**3,382**	3,079	2,863	2,699	2,571	**2,467**	2,381	2,307	2,245	2,190	**2,142**	2,099	2,061	2,026	1,995	**1,966**	1,940
349	6,708	4,667	3,838	**3,373**	3,070	2,854	2,691	2,562	**2,458**	2,372	2,299	2,236	2,181	**2,133**	2,090	2,052	2,017	1,986	**1,958**	1,931
399	6,699	4,659	3,831	**3,366**	3,063	2,847	2,684	2,556	**2,452**	2,366	2,292	2,229	2,175	**2,127**	2,084	2,045	2,011	1,979	**1,951**	1,925
499	**6,686**	**4,648**	**3,821**	**3,357**	**3,054**	**2,838**	**2,675**	**2,547**	**2,443**	**2,357**	**2,283**	**2,220**	**2,166**	**2,117**	**2,075**	**2,036**	**2,002**	**1,970**	**1,942**	**1,915**
599	6,677	4,641	3,814	**3,351**	3,048	2,832	2,669	2,541	**2,437**	2,351	2,277	2,214	2,160	**2,111**	2,069	2,030	1,996	1,964	**1,935**	1,909
699	6,671	4,636	3,810	**3,346**	3,043	2,828	2,665	2,537	**2,433**	2,346	2,273	2,210	2,155	**2,107**	2,064	2,026	1,991	1,960	**1,931**	1,905
799	6,667	4,632	3,806	**3,343**	3,040	2,825	2,662	2,534	**2,430**	2,343	2,270	2,207	2,152	**2,104**	2,061	2,023	1,988	1,956	**1,928**	1,901
899	6,663	4,629	3,803	**3,340**	3,038	2,822	2,659	2,531	**2,427**	2,341	2,267	2,205	2,150	**2,101**	2,059	2,020	1,985	1,954	**1,925**	1,899
999	6,660	4,626	3,801	**3,338**	3,036	2,820	2,657	2,529	**2,425**	2,339	2,265	2,203	2,148	**2,099**	2,057	2,018	1,983	1,952	**1,923**	1,897
∞	**6,635**	**4,605**	**3,782**	**3,319**	**3,017**	**2,802**	**2,639**	**2,511**	**2,407**	**2,321**	**2,248**	**2,185**	**2,130**	**2,082**	**2,039**	**2,000**	**1,965**	**1,934**	**1,905**	**1,878**

Критические значения распределения Фишера $F_{\alpha}(df_1, df_2)$ *(продолжение)*

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
	α = 0,05																			
1	248	249	249	**249**	249	249	250	250	**250**	250	250	250	250	**251**	251	251	251	251	**251**	251
2	19,45	19,45	19,45	**19,45**	19,46	19,46	19,46	19,46	**19,46**	19,46	19,46	19,46	19,47	**19,47**	19,47	19,47	19,47	19,47	**19,47**	19,47
3	8,654	8,648	8,643	**8,638**	8,634	8,630	8,626	8,623	**8,620**	8,617	8,614	8,611	8,609	**8,606**	8,604	8,602	8,600	8,598	**8,596**	8,594
4	5,795	5,787	5,781	**5,774**	5,769	5,763	5,759	5,754	**5,750**	5,746	5,742	5,739	5,735	**5,732**	5,729	5,727	5,724	5,722	**5,719**	5,717
5	4,549	4,541	4,534	**4,527**	4,521	4,515	4,510	4,505	**4,500**	4,496	4,492	4,488	4,484	**4,481**	4,478	4,474	4,472	4,469	**4,466**	4,464
6	3,865	3,856	3,849	**3,841**	3,835	3,829	3,823	3,818	**3,813**	3,808	3,804	3,800	3,796	**3,792**	3,789	3,786	3,783	3,780	**3,777**	3,774
7	3,435	3,426	3,418	**3,410**	3,404	3,397	3,391	3,386	**3,381**	3,376	3,371	3,367	3,363	**3,359**	3,356	3,352	3,349	3,346	**3,343**	3,340
8	3,140	3,131	3,123	**3,115**	3,108	3,102	3,095	3,090	**3,084**	3,079	3,075	3,070	3,066	**3,062**	3,059	3,055	3,052	3,049	**3,046**	3,043
9	**2,926**	**2,917**	**2,908**	**2,900**	**2,893**	**2,886**	**2,880**	**2,874**	**2,869**	**2,864**	**2,859**	**2,854**	**2,850**	**2,846**	**2,842**	**2,839**	**2,835**	**2,832**	**2,829**	**2,826**
10	2,764	2,754	2,745	**2,737**	2,730	2,723	2,716	2,710	**2,705**	2,700	2,695	2,690	2,686	**2,681**	2,678	2,674	2,670	2,667	**2,664**	2,661
11	2,636	2,626	2,617	**2,609**	2,601	2,594	2,588	2,582	**2,576**	2,570	2,565	2,561	2,556	**2,552**	2,548	2,544	2,541	2,537	**2,534**	2,531
12	2,533	2,523	2,514	**2,505**	2,498	2,491	2,484	2,478	**2,472**	2,466	2,461	2,456	2,452	**2,447**	2,443	2,439	2,436	2,432	**2,429**	2,426
13	2,448	2,438	2,429	**2,420**	2,412	2,405	2,398	2,392	**2,386**	2,380	2,375	2,370	2,366	**2,361**	2,357	2,353	2,349	2,346	**2,342**	2,339
14	2,377	2,367	2,357	**2,349**	2,341	2,333	2,326	2,320	**2,314**	2,308	2,303	2,298	2,293	**2,289**	2,284	2,280	2,277	2,273	**2,270**	2,266
15	2,316	2,306	2,297	**2,288**	2,280	2,272	2,265	2,259	**2,253**	2,247	2,241	2,236	2,232	**2,227**	2,223	2,219	2,215	2,211	**2,208**	2,204
	α = 0,01																			
1	6216	6223	6229	**6234**	6240	6245	6249	6253	**6257**	6260	6264	6267	6270	**6273**	6275	6278	6280	6283	**6285**	6286
2	99,45	99,46	99,46	**99,46**	99,46	99,46	99,46	99,46	**99,46**	99,47	99,47	99,47	99,47	**99,47**	99,47	99,47	99,47	99,47	**99,47**	99,48
3	26,66	26,64	26,62	**26,60**	26,58	26,56	26,55	26,53	**26,52**	26,50	26,49	26,48	26,47	**26,46**	26,45	26,44	26,43	26,43	**26,42**	26,41
4	13,99	13,97	13,95	**13,93**	13,91	13,89	13,88	13,86	**13,85**	13,84	13,83	13,81	13,80	**13,79**	13,79	13,78	13,77	13,76	**13,75**	13,75
5	9,528	9,506	9,485	**9,466**	9,449	9,433	9,418	9,404	**9,391**	9,379	9,368	9,357	9,347	**9,338**	9,329	9,321	9,313	9,305	**9,298**	9,291
6	7,372	7,351	7,331	**7,313**	7,296	7,281	7,266	7,253	**7,240**	7,229	7,218	7,207	7,198	**7,189**	7,180	7,172	7,164	7,157	**7,150**	7,143
7	6,132	6,111	6,092	**6,074**	6,058	6,043	6,029	6,016	**6,003**	5,992	5,981	5,971	5,962	**5,953**	5,944	5,936	5,929	5,922	**5,915**	5,908
8	5,336	5,316	5,297	**5,279**	5,263	5,248	5,234	5,221	**5,209**	5,198	5,188	5,178	5,168	**5,159**	5,151	5,143	5,136	5,129	**5,122**	5,116
9	**4,786**	**4,765**	**4,746**	**4,729**	**4,713**	**4,698**	**4,684**	**4,672**	**4,660**	**4,649**	**4,638**	**4,628**	**4,619**	**4,610**	**4,602**	**4,594**	**4,587**	**4,580**	**4,573**	**4,567**
10	4,383	4,363	4,344	**4,327**	4,311	4,296	4,283	4,270	**4,258**	4,247	4,236	4,227	4,217	**4,209**	4,201	4,193	4,185	4,178	**4,172**	4,165
11	4,077	4,057	4,038	**4,021**	4,005	3,990	3,977	3,964	**3,952**	3,941	3,931	3,921	3,912	**3,903**	3,895	3,887	3,880	3,873	**3,866**	3,860
12	3,836	3,816	3,798	**3,780**	3,765	3,750	3,736	3,724	**3,712**	3,701	3,690	3,681	3,671	**3,663**	3,654	3,647	3,639	3,632	**3,626**	3,619
13	3,643	3,622	3,604	**3,587**	3,571	3,556	3,543	3,530	**3,518**	3,507	3,497	3,487	3,478	**3,469**	3,461	3,453	3,445	3,438	**3,432**	3,425
14	3,483	3,463	3,444	**3,427**	3,412	3,397	3,383	3,371	**3,359**	3,348	3,337	3,327	3,318	**3,309**	3,301	3,293	3,286	3,279	**3,272**	3,266
15	3,350	3,330	3,311	**3,294**	3,278	3,264	3,250	3,237	**3,225**	3,214	3,204	3,194	3,184	**3,176**	3,167	3,160	3,152	3,145	**3,138**	3,132

df_2	Число степеней свободы для бо́льшей дисперсии df_1																			
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
	α = 0,05																			
16	2,264	2,254	2,244	**2,235**	2,227	2,220	2,212	2,206	**2,200**	2,194	2,188	2,183	2,178	**2,174**	2,169	2,165	2,161	2,158	**2,154**	2,151
17	2,219	2,208	2,199	**2,190**	2,181	2,174	2,167	2,160	**2,154**	2,148	2,142	2,137	2,132	**2,127**	2,123	2,119	2,115	2,111	**2,107**	2,104
18	2,179	2,168	2,159	**2,150**	2,141	2,134	2,126	2,119	**2,113**	2,107	2,102	2,096	2,091	**2,087**	2,082	2,078	2,074	2,070	**2,066**	2,063
19	**2,144**	**2,133**	**2,123**	**2,114**	**2,106**	**2,098**	**2,090**	**2,084**	**2,077**	**2,071**	**2,066**	**2,060**	**2,055**	**2,050**	**2,046**	**2,042**	**2,037**	**2,034**	**2,030**	**2,026**
20	2,112	2,102	2,092	**2,082**	2,074	2,066	2,059	2,052	**2,045**	2,039	2,033	2,028	2,023	**2,018**	2,013	2,009	2,005	2,001	**1,997**	1,994
21	2,084	2,073	2,063	**2,054**	2,045	2,037	2,030	2,023	**2,016**	2,010	2,004	1,999	1,994	**1,989**	1,984	1,980	1,976	1,972	**1,968**	1,965
22	2,059	2,048	2,038	**2,028**	2,020	2,012	2,004	1,997	**1,990**	1,984	1,978	1,973	1,968	**1,963**	1,958	1,954	1,949	1,945	**1,942**	1,938
23	2,036	2,025	2,014	**2,005**	1,996	1,988	1,981	1,973	**1,967**	1,961	1,955	1,949	1,944	**1,939**	1,934	1,930	1,925	1,921	**1,918**	1,914
24	2,015	2,003	1,993	**1,984**	1,975	1,967	1,959	1,952	**1,945**	1,939	1,933	1,927	1,922	**1,917**	1,912	1,908	1,904	1,900	**1,896**	1,892
25	1,995	1,984	1,974	**1,964**	1,955	1,947	1,939	1,932	**1,926**	1,919	1,913	1,908	1,902	**1,897**	1,892	1,888	1,884	1,879	**1,876**	1,872
26	1,978	1,966	1,956	**1,946**	1,938	1,929	1,921	1,914	**1,907**	1,901	1,895	1,889	1,884	**1,879**	1,874	1,869	1,865	1,861	**1,857**	1,853
27	1,961	1,950	1,940	**1,930**	1,921	1,913	1,905	1,898	**1,891**	1,884	1,878	1,872	1,867	**1,862**	1,857	1,852	1,848	1,844	**1,840**	1,836
28	1,946	1,935	1,924	**1,915**	1,906	1,897	1,889	1,882	**1,875**	1,869	1,863	1,857	1,851	**1,846**	1,841	1,837	1,832	1,828	**1,824**	1,820
29	**1,932**	**1,921**	**1,910**	**1,901**	**1,891**	**1,883**	**1,875**	**1,868**	**1,861**	**1,854**	**1,848**	**1,842**	**1,837**	**1,832**	**1,827**	**1,822**	**1,818**	**1,813**	**1,809**	**1,806**
34	1,875	1,863	1,853	**1,843**	1,833	1,825	1,817	1,809	**1,802**	1,795	1,789	1,783	1,777	**1,772**	1,767	1,762	1,758	1,753	**1,749**	1,745
39	1,833	1,821	1,810	**1,800**	1,791	1,782	1,774	1,766	**1,759**	1,752	1,745	1,739	1,733	**1,728**	1,723	1,718	1,713	1,709	**1,704**	1,700
	α = 0,01																			
16	3,237	3,216	3,198	**3,181**	3,165	3,150	3,137	3,124	**3,112**	3,101	3,090	3,080	3,071	**3,062**	3,054	3,046	3,039	3,031	**3,025**	3,018
17	3,139	3,119	3,101	**3,083**	3,068	3,053	3,039	3,026	**3,014**	3,003	2,993	2,983	2,973	**2,965**	2,956	2,948	2,941	2,934	**2,927**	2,920
18	3,055	3,035	3,016	**2,999**	2,983	2,968	2,955	2,942	**2,930**	2,919	2,908	2,898	2,889	**2,880**	2,871	2,863	2,856	2,849	**2,842**	2,835
19	**2,981**	**2,961**	**2,942**	**2,925**	**2,909**	**2,894**	**2,880**	**2,868**	**2,855**	**2,844**	**2,834**	**2,824**	**2,814**	**2,805**	**2,797**	**2,789**	**2,781**	**2,774**	**2,767**	**2,761**
20	2,916	2,895	2,877	**2,859**	2,843	2,829	2,815	2,802	**2,790**	2,778	2,768	2,758	2,748	**2,739**	2,731	2,723	2,715	2,708	**2,701**	2,695
21	2,857	2,837	2,818	**2,801**	2,785	2,770	2,756	2,743	**2,731**	2,720	2,709	2,699	2,690	**2,681**	2,672	2,664	2,657	2,649	**2,642**	2,636
22	2,805	2,785	2,766	**2,749**	2,733	2,718	2,704	2,691	**2,679**	2,667	2,657	2,647	2,637	**2,628**	2,620	2,612	2,604	2,597	**2,590**	2,583
23	2,758	2,738	2,719	**2,702**	2,686	2,671	2,657	2,644	**2,632**	2,620	2,609	2,599	2,590	**2,581**	2,572	2,564	2,556	2,549	**2,542**	2,536
24	2,716	2,695	2,676	**2,659**	2,643	2,628	2,614	2,601	**2,589**	2,577	2,567	2,556	2,547	**2,538**	2,529	2,521	2,513	2,506	**2,499**	2,492
25	2,677	2,657	2,638	**2,620**	2,604	2,589	2,575	2,562	**2,550**	2,538	2,527	2,517	2,508	**2,499**	2,490	2,482	2,474	2,467	**2,460**	2,453
26	2,642	2,621	2,602	**2,585**	2,569	2,554	2,540	2,526	**2,514**	2,503	2,492	2,482	2,472	**2,463**	2,454	2,446	2,438	2,431	**2,424**	2,417
27	2,609	2,589	2,570	**2,552**	2,536	2,521	2,507	2,494	**2,481**	2,470	2,459	2,449	2,439	**2,430**	2,421	2,413	2,405	2,398	**2,391**	2,384
28	2,579	2,559	2,540	**2,522**	2,506	2,491	2,477	2,464	**2,451**	2,440	2,429	2,419	2,409	**2,400**	2,391	2,383	2,375	2,367	**2,360**	2,354
29	**2,552**	**2,531**	**2,512**	**2,495**	**2,478**	**2,463**	**2,449**	**2,436**	**2,423**	**2,412**	**2,401**	**2,391**	**2,381**	**2,372**	**2,363**	**2,355**	**2,347**	**2,339**	**2,332**	**2,325**
34	2,440	2,420	2,400	**2,383**	2,366	2,351	2,337	2,323	**2,311**	2,299	2,288	2,277	2,268	**2,258**	2,249	2,241	2,233	2,225	**2,218**	2,211
39	2,360	2,339	2,319	**2,302**	2,285	2,270	2,255	2,242	**2,229**	2,217	2,206	2,195	2,185	**2,176**	2,167	2,158	2,150	2,143	**2,135**	2,128

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
	$\alpha = 0{,}05$																			
44	1,801	1,789	1,778	**1,767**	1,758	1,749	1,741	1,733	**1,725**	1,718	1,712	1,706	1,700	**1,694**	1,689	1,684	1,679	1,674	**1,670**	1,666
49	**1,775**	**1,763**	**1,752**	**1,742**	**1,732**	**1,723**	**1,714**	**1,706**	**1,699**	**1,692**	**1,685**	**1,679**	**1,673**	**1,667**	**1,662**	**1,657**	**1,652**	**1,647**	**1,643**	**1,639**
54	1,755	1,743	1,731	**1,721**	1,711	1,702	1,693	1,685	**1,677**	1,670	1,663	1,657	1,651	**1,645**	1,640	1,635	1,630	1,625	**1,620**	1,616
59	1,738	1,725	1,714	**1,703**	1,693	1,684	1,675	1,667	**1,660**	1,652	1,646	1,639	1,633	**1,627**	1,622	1,616	1,611	1,607	**1,602**	1,598
64	1,723	1,711	1,699	**1,689**	1,679	1,669	1,661	1,652	**1,645**	1,637	1,630	1,624	1,618	**1,612**	1,606	1,601	1,596	1,591	**1,586**	1,582
69	1,711	1,698	1,687	**1,676**	1,666	1,657	1,648	1,640	**1,632**	1,624	1,617	1,611	1,605	**1,599**	1,593	1,588	1,583	1,578	**1,573**	1,569
74	1,700	1,688	1,676	**1,665**	1,655	1,646	1,637	1,629	**1,621**	1,613	1,606	1,600	1,593	**1,587**	1,582	1,576	1,571	1,566	**1,561**	1,557
79	1,691	1,679	1,667	**1,656**	1,646	1,636	1,627	1,619	**1,611**	1,604	1,596	1,590	1,583	**1,577**	1,572	1,566	1,561	1,556	**1,551**	1,547
84	1,683	1,670	1,659	**1,648**	1,637	1,628	1,619	1,610	**1,602**	1,595	1,588	1,581	1,575	**1,569**	1,563	1,557	1,552	1,547	**1,542**	1,538
89	1,676	1,663	1,651	**1,640**	1,630	1,620	1,611	1,603	**1,595**	1,587	1,580	1,573	1,567	**1,561**	1,555	1,550	1,544	1,539	**1,534**	1,530
99	**1,664**	**1,651**	**1,639**	**1,628**	**1,617**	**1,608**	**1,599**	**1,590**	**1,582**	**1,574**	**1,567**	**1,560**	**1,554**	**1,548**	**1,542**	**1,536**	**1,531**	**1,526**	**1,521**	**1,516**
109	1,654	1,641	1,629	**1,618**	1,607	1,597	1,588	1,580	**1,572**	1,564	1,557	1,550	1,543	**1,537**	1,531	1,525	1,520	1,515	**1,510**	1,505
119	1,645	1,632	1,620	**1,609**	1,599	1,589	1,580	1,571	**1,563**	1,555	1,548	1,541	1,534	**1,528**	1,522	1,516	1,511	1,506	**1,501**	1,496
129	1,638	1,625	1,613	**1,602**	1,592	1,582	1,572	1,564	**1,555**	1,548	1,540	1,533	1,527	**1,520**	1,514	1,509	1,503	1,498	**1,493**	1,488
139	1,632	1,619	1,607	**1,596**	1,585	1,575	1,566	1,557	**1,549**	1,541	1,534	1,527	1,520	**1,514**	1,508	1,502	1,497	1,491	**1,486**	1,482
149	1,627	1,614	1,602	**1,591**	1,580	1,570	1,561	1,552	**1,544**	1,536	1,528	1,521	1,515	**1,508**	1,502	1,496	1,491	1,486	**1,481**	1,476
	$\alpha = 0{,}01$																			
44	2,299	2,278	2,258	**2,240**	2,223	2,208	2,193	2,180	**2,167**	2,155	2,144	2,133	2,123	**2,113**	2,104	2,096	2,087	2,080	**2,072**	2,065
49	**2,251**	**2,229**	**2,210**	**2,192**	**2,175**	**2,159**	**2,145**	**2,131**	**2,118**	**2,106**	**2,095**	**2,084**	**2,074**	**2,064**	**2,055**	**2,046**	**2,038**	**2,030**	**2,022**	**2,015**
54	2,212	2,191	2,171	**2,153**	2,136	2,120	2,106	2,092	**2,079**	2,067	2,055	2,044	2,034	**2,024**	2,015	2,006	1,998	1,990	**1,982**	1,975
59	2,180	2,159	2,139	**2,121**	2,104	2,088	2,073	2,060	**2,047**	2,034	2,023	2,012	2,001	**1,992**	1,982	1,973	1,965	1,957	**1,949**	1,942
64	2,154	2,132	2,113	**2,094**	2,077	2,061	2,046	2,033	**2,019**	2,007	1,995	1,984	1,974	**1,964**	1,955	1,946	1,937	1,929	**1,922**	1,914
69	2,131	2,110	2,090	**2,072**	2,054	2,038	2,024	2,010	**1,996**	1,984	1,972	1,961	1,951	**1,941**	1,931	1,922	1,914	1,906	**1,898**	1,890
74	2,112	2,090	2,070	**2,052**	2,035	2,019	2,004	1,990	**1,977**	1,964	1,952	1,941	1,931	**1,921**	1,911	1,902	1,894	1,885	**1,878**	1,870
79	2,095	2,073	2,053	**2,035**	2,018	2,002	1,987	1,973	**1,959**	1,947	1,935	1,924	1,913	**1,903**	1,894	1,885	1,876	1,868	**1,860**	1,852
84	2,080	2,059	2,039	**2,020**	2,003	1,987	1,972	1,957	**1,944**	1,932	1,920	1,908	1,898	**1,888**	1,878	1,869	1,860	1,852	**1,844**	1,837
89	2,067	2,045	2,025	**2,007**	1,990	1,973	1,958	1,944	**1,931**	1,918	1,906	1,895	1,884	**1,874**	1,864	1,855	1,847	1,838	**1,830**	1,823
99	**2,045**	**2,023**	**2,003**	**1,985**	**1,967**	**1,951**	**1,936**	**1,921**	**1,908**	**1,895**	**1,883**	**1,872**	**1,861**	**1,851**	**1,841**	**1,832**	**1,823**	**1,815**	**1,807**	**1,799**
109	2,027	2,005	1,985	**1,966**	1,949	1,933	1,917	1,903	**1,889**	1,877	1,865	1,853	1,843	**1,832**	1,823	1,813	1,804	1,796	**1,788**	1,780
119	2,012	1,990	1,970	**1,951**	1,934	1,917	1,902	1,888	**1,874**	1,861	1,849	1,838	1,827	**1,817**	1,807	1,798	1,789	1,780	**1,772**	1,764
129	2,000	1,978	1,958	**1,939**	1,921	1,905	1,889	1,875	**1,861**	1,848	1,836	1,825	1,814	**1,804**	1,794	1,784	1,775	1,767	**1,759**	1,751
139	1,989	1,967	1,947	**1,928**	1,910	1,894	1,878	1,864	**1,850**	1,837	1,825	1,814	1,803	**1,792**	1,782	1,773	1,764	1,756	**1,747**	1,739
149	1,980	1,958	1,938	**1,919**	1,901	1,884	1,869	1,854	**1,841**	1,828	1,816	1,804	1,793	**1,783**	1,773	1,763	1,754	1,746	**1,737**	1,730

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
	***α* = 0,05**																			
159	1,623	1,610	1,597	**1,586**	1,575	1,565	1,556	1,547	**1,539**	1,531	1,524	1,517	1,510	**1,503**	1,497	1,492	1,486	1,481	**1,476**	1,471
169	1,619	1,606	1,593	**1,582**	1,571	1,561	1,552	1,543	**1,535**	1,527	1,519	1,512	1,505	**1,499**	1,493	1,487	1,482	1,476	**1,471**	1,466
179	1,615	1,602	1,590	**1,578**	1,568	1,558	1,548	1,539	**1,531**	1,523	1,516	1,508	1,502	**1,495**	1,489	1,483	1,478	1,472	**1,467**	1,462
189	1,612	1,599	1,587	**1,575**	1,564	1,554	1,545	1,536	**1,528**	1,520	1,512	1,505	1,498	**1,492**	1,486	1,480	1,474	1,469	**1,464**	1,459
199	**1,609**	**1,596**	**1,584**	**1,572**	**1,561**	**1,551**	**1,542**	**1,533**	**1,525**	**1,517**	**1,509**	**1,502**	**1,495**	**1,489**	**1,482**	**1,477**	**1,471**	**1,466**	**1,460**	**1,455**
249	1,599	1,585	1,573	**1,561**	1,550	1,540	1,531	1,522	**1,513**	1,505	1,498	1,490	1,483	**1,477**	1,471	1,465	1,459	1,453	**1,448**	1,443
299	1,591	1,578	1,565	**1,554**	1,543	1,533	1,523	1,514	**1,506**	1,497	1,490	1,482	1,476	**1,469**	1,463	1,457	1,451	1,445	**1,440**	1,435
349	1,586	1,573	1,560	**1,549**	1,538	1,527	1,518	1,509	**1,500**	1,492	1,484	1,477	1,470	**1,463**	1,457	1,451	1,445	1,440	**1,434**	1,429
399	1,582	1,569	1,556	**1,545**	1,534	1,523	1,514	1,505	**1,496**	1,488	1,480	1,473	1,466	**1,459**	1,453	1,447	1,441	1,435	**1,430**	1,425
499	**1,577**	**1,564**	**1,551**	**1,539**	**1,528**	**1,518**	**1,508**	**1,499**	**1,490**	**1,482**	**1,474**	**1,467**	**1,460**	**1,453**	**1,447**	**1,441**	**1,435**	**1,429**	**1,424**	**1,419**
599	1,574	1,560	1,547	**1,536**	1,525	1,514	1,504	1,495	**1,487**	1,478	1,470	1,463	1,456	**1,449**	1,443	1,437	1,431	1,425	**1,420**	1,415
699	1,571	1,557	1,545	**1,533**	1,522	1,511	1,502	1,493	**1,484**	1,476	1,468	1,460	1,453	**1,446**	1,440	1,434	1,428	1,422	**1,417**	1,412
799	1,569	1,555	1,543	**1,531**	1,520	1,510	1,500	1,490	**1,482**	1,473	1,466	1,458	1,451	**1,444**	1,438	1,432	1,426	1,420	**1,415**	1,409
899	1,568	1,554	1,541	**1,529**	1,518	1,508	1,498	1,489	**1,480**	1,472	1,464	1,457	1,449	**1,443**	1,436	1,430	1,424	1,418	**1,413**	1,408
999	1,566	1,553	1,540	**1,528**	1,517	1,507	1,497	1,488	**1,479**	1,471	1,463	1,455	1,448	**1,441**	1,435	1,429	1,423	1,417	**1,412**	1,406
∞	**1,556**	**1,542**	**1,529**	**1,517**	**1,506**	**1,496**	**1,486**	**1,476**	**1,467**	**1,459**	**1,451**	**1,444**	**1,436**	**1,429**	**1,423**	**1,417**	**1,411**	**1,405**	**1,399**	**1,394**
	***α* = 0,01**																			
159	1,972	1,950	1,929	**1,910**	1,893	1,876	1,861	1,846	**1,832**	1,819	1,807	1,796	1,785	**1,774**	1,764	1,755	1,746	1,737	**1,729**	1,721
169	1,965	1,943	1,922	**1,903**	1,886	1,869	1,853	1,839	**1,825**	1,812	1,800	1,788	1,777	**1,767**	1,757	1,747	1,738	1,730	**1,721**	1,713
179	1,958	1,936	1,916	**1,897**	1,879	1,863	1,847	1,832	**1,819**	1,806	1,793	1,782	1,771	**1,760**	1,750	1,741	1,731	1,723	**1,714**	1,706
189	1,953	1,931	1,910	**1,891**	1,873	1,857	1,841	1,827	**1,813**	1,800	1,787	1,776	1,765	**1,754**	1,744	1,735	1,725	1,717	**1,708**	1,700
199	**1,948**	**1,926**	**1,905**	**1,886**	**1,868**	**1,852**	**1,836**	**1,821**	**1,808**	**1,795**	**1,782**	**1,771**	**1,759**	**1,749**	**1,739**	**1,729**	**1,720**	**1,711**	**1,703**	**1,695**
249	1,929	1,907	1,886	**1,867**	1,849	1,832	1,817	1,802	**1,788**	1,775	1,762	1,751	1,739	**1,729**	1,719	1,709	1,700	1,691	**1,682**	1,674
299	1,916	1,894	1,873	**1,854**	1,836	1,819	1,804	1,789	**1,775**	1,762	1,749	1,737	1,726	**1,715**	1,705	1,695	1,686	1,677	**1,669**	1,661
349	1,907	1,885	1,864	**1,845**	1,827	1,810	1,794	1,779	**1,765**	1,752	1,740	1,728	1,717	**1,706**	1,696	1,686	1,676	1,668	**1,659**	1,651
399	1,900	1,878	1,857	**1,838**	1,820	1,803	1,787	1,773	**1,758**	1,745	1,733	1,721	1,709	**1,699**	1,688	1,679	1,669	1,660	**1,652**	1,643
499	**1,891**	**1,869**	**1,848**	**1,829**	**1,811**	**1,794**	**1,778**	**1,763**	**1,749**	**1,735**	**1,723**	**1,711**	**1,699**	**1,689**	**1,678**	**1,669**	**1,659**	**1,650**	**1,641**	**1,633**
599	1,885	1,862	1,842	**1,822**	1,804	1,787	1,771	1,756	**1,742**	1,729	1,716	1,704	1,693	**1,682**	1,672	1,662	1,652	1,643	**1,635**	1,626
699	1,880	1,858	1,837	**1,818**	1,800	1,783	1,767	1,752	**1,738**	1,724	1,712	1,700	1,688	**1,677**	1,667	1,657	1,648	1,638	**1,630**	1,622
799	1,877	1,855	1,834	**1,814**	1,796	1,779	1,763	1,748	**1,734**	1,721	1,708	1,696	1,685	**1,674**	1,663	1,653	1,644	1,635	**1,626**	1,618
899	1,875	1,852	1,831	**1,812**	1,794	1,777	1,761	1,746	**1,731**	1,718	1,705	1,693	1,682	**1,671**	1,661	1,651	1,641	1,632	**1,623**	1,615
999	1,872	1,850	1,829	**1,810**	1,792	1,774	1,759	1,743	**1,729**	1,716	1,703	1,691	1,680	**1,669**	1,658	1,648	1,639	1,630	**1,621**	1,613
∞	**1,854**	**1,831**	**1,810**	**1,791**	**1,773**	**1,755**	**1,739**	**1,724**	**1,710**	**1,696**	**1,684**	**1,671**	**1,660**	**1,649**	**1,638**	**1,628**	**1,619**	**1,610**	**1,601**	**1,592**

Критические значения распределения Фишера $F_\alpha(df_1, df_2)$ *(продолжение)*

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**54**	**59**	**64**	**69**	**74**	**79**	**84**	**89**	**94**	**99**	**109**
	$\alpha = 0,05$																			
1	251	251	251	**251**	251	252	252	252	**252**	252	252	252	252	**253**	253	253	253	253	**253**	253
2	19,47	19,47	19,47	**19,47**	19,47	19,47	19,47	19,48	**19,48**	19,48	19,48	19,48	19,48	**19,48**	19,48	19,48	19,48	19,49	**19,49**	19,49
3	8,593	8,591	8,590	**8,588**	8,587	8,586	8,584	8,583	**8,582**	8,577	8,573	8,569	8,566	**8,563**	8,561	8,559	8,557	8,556	**8,554**	8,552
4	5,715	5,713	5,711	**5,709**	5,707	5,706	5,704	5,702	**5,701**	5,694	5,689	5,684	5,680	**5,677**	5,674	5,671	5,668	5,666	**5,664**	5,661
5	4,461	4,459	4,457	**4,455**	4,453	4,451	4,449	4,448	**4,446**	4,439	4,432	4,427	4,423	**4,419**	4,416	4,413	4,410	4,408	**4,405**	4,402
6	3,772	3,769	3,767	**3,765**	3,763	3,761	3,759	3,757	**3,755**	3,748	3,741	3,735	3,731	**3,727**	3,723	3,720	3,717	3,714	**3,712**	3,708
7	3,338	3,335	3,333	**3,331**	3,328	3,326	3,324	3,322	**3,321**	3,312	3,306	3,300	3,295	**3,290**	3,287	3,283	3,280	3,278	**3,275**	3,271
8	3,040	3,037	3,035	**3,033**	3,030	3,028	3,026	3,024	**3,022**	3,014	3,007	3,001	2,995	**2,991**	2,987	2,983	2,980	2,978	**2,975**	2,971
9	**2,823**	**2,820**	**2,818**	**2,815**	**2,813**	**2,811**	**2,809**	**2,807**	**2,805**	**2,796**	**2,789**	**2,782**	**2,777**	**2,772**	**2,768**	**2,765**	**2,761**	**2,759**	**2,756**	**2,752**
10	2,658	2,655	2,653	**2,650**	2,648	2,645	2,643	2,641	**2,639**	2,630	2,622	2,616	2,611	**2,606**	2,602	2,598	2,595	2,592	**2,589**	2,584
11	2,528	2,525	2,522	**2,520**	2,517	2,515	2,513	2,511	**2,509**	2,499	2,492	2,485	2,479	**2,474**	2,470	2,466	2,463	2,460	**2,457**	2,452
12	2,423	2,420	2,417	**2,415**	2,412	2,410	2,407	2,405	**2,403**	2,394	2,386	2,379	2,373	**2,368**	2,364	2,360	2,356	2,353	**2,350**	2,345
13	2,336	2,333	2,330	**2,328**	2,325	2,323	2,320	2,318	**2,316**	2,306	2,298	2,291	2,285	**2,280**	2,276	2,272	2,268	2,265	**2,262**	2,257
14	2,263	2,260	2,257	**2,255**	2,252	2,250	2,247	2,245	**2,243**	2,233	2,224	2,217	2,211	**2,206**	2,201	2,197	2,194	2,190	**2,188**	2,182
15	2,201	2,198	2,195	**2,192**	2,190	2,187	2,185	2,182	**2,180**	2,170	2,162	2,154	2,148	**2,143**	2,138	2,134	2,130	2,127	**2,124**	2,119
	$\alpha = 0,01$																			
1	6289	6290	6292	**6294**	6296	6297	6299	6300	**6301**	6307	6313	6316	6320	**6323**	6326	6328	6330	6332	**6334**	6337
2	99,48	99,48	99,48	**99,48**	99,48	99,48	99,48	99,48	**99,48**	99,48	99,48	99,48	99,48	**99,48**	99,48	99,49	99,49	99,49	**99,49**	99,49
3	26,40	26,40	26,39	**26,39**	26,38	26,37	26,37	26,36	**26,36**	26,34	26,32	26,30	26,29	**26,28**	26,27	26,26	26,25	26,25	**26,24**	26,23
4	13,74	13,73	13,73	**13,72**	13,71	13,71	13,70	13,70	**13,69**	13,67	13,66	13,64	13,63	**13,62**	13,61	13,60	13,59	13,58	**13,58**	13,57
5	9,285	9,278	9,273	**9,267**	9,262	9,256	9,251	9,247	**9,242**	9,222	9,205	9,191	9,179	**9,168**	9,159	9,151	9,143	9,137	**9,131**	9,121
6	7,137	7,131	7,125	**7,120**	7,115	7,110	7,105	7,100	**7,096**	7,076	7,060	7,046	7,034	**7,024**	7,015	7,007	7,000	6,993	**6,988**	6,978
7	5,902	5,896	5,891	**5,885**	5,880	5,875	5,871	5,866	**5,862**	5,843	5,826	5,813	5,801	**5,791**	5,782	5,774	5,767	5,761	**5,756**	5,746
8	5,110	5,104	5,098	**5,093**	5,088	5,083	5,078	5,074	**5,070**	5,050	5,035	5,021	5,009	**4,999**	4,991	4,983	4,976	4,970	**4,964**	4,955
9	**4,561**	**4,555**	**4,549**	**4,544**	**4,539**	**4,534**	**4,530**	**4,525**	**4,521**	**4,502**	**4,486**	**4,473**	**4,461**	**4,451**	**4,442**	**4,435**	**4,428**	**4,422**	**4,416**	**4,406**
10	4,159	4,153	4,148	**4,143**	4,138	4,133	4,128	4,124	**4,120**	4,101	4,085	4,071	4,060	**4,050**	4,041	4,033	4,026	4,020	**4,015**	4,005
11	3,854	3,848	3,842	**3,837**	3,832	3,827	3,822	3,818	**3,814**	3,795	3,779	3,765	3,754	**3,744**	3,735	3,727	3,721	3,714	**3,709**	3,699
12	3,613	3,607	3,602	**3,597**	3,592	3,587	3,582	3,578	**3,573**	3,554	3,538	3,525	3,513	**3,503**	3,494	3,487	3,480	3,473	**3,468**	3,458
13	3,419	3,413	3,408	**3,403**	3,398	3,393	3,388	3,384	**3,379**	3,360	3,344	3,331	3,319	**3,309**	3,300	3,292	3,285	3,279	**3,273**	3,264
14	3,260	3,254	3,248	**3,243**	3,238	3,233	3,228	3,224	**3,219**	3,200	3,184	3,171	3,159	**3,149**	3,140	3,132	3,125	3,119	**3,113**	3,103
15	3,126	3,120	3,114	**3,109**	3,104	3,099	3,094	3,090	**3,086**	3,066	3,050	3,036	3,025	**3,014**	3,005	2,997	2,990	2,984	**2,978**	2,968

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**54**	**59**	**64**	**69**	**74**	**79**	**84**	**89**	**94**	**99**	**109**
	$\alpha = 0{,}05$																			
16	2,147	2,144	2,141	**2,139**	2,136	2,133	2,131	2,128	**2,126**	2,116	2,107	2,100	2,094	**2,088**	2,084	2,079	2,075	2,072	**2,069**	2,064
19	**2,023**	**2,020**	**2,017**	**2,014**	**2,011**	**2,008**	**2,006**	**2,003**	**2,001**	**1,990**	**1,981**	**1,974**	**1,967**	**1,961**	**1,956**	**1,952**	**1,948**	**1,944**	**1,941**	**1,935**
24	1,888	1,885	1,882	**1,879**	1,876	1,873	1,870	1,868	**1,865**	1,854	1,844	1,836	1,829	**1,823**	1,817	1,813	1,808	1,805	**1,801**	1,795
29	**1,802**	**1,798**	**1,795**	**1,792**	**1,789**	**1,786**	**1,783**	**1,780**	**1,777**	**1,766**	**1,756**	**1,747**	**1,740**	**1,733**	**1,727**	**1,722**	**1,718**	**1,714**	**1,710**	**1,704**
39	**1,696**	**1,693**	**1,689**	**1,686**	**1,682**	**1,679**	**1,676**	**1,673**	**1,670**	**1,658**	**1,647**	**1,638**	**1,630**	**1,623**	**1,617**	**1,611**	**1,607**	**1,602**	**1,598**	**1,591**
49	**1,634**	**1,631**	**1,627**	**1,623**	**1,620**	**1,616**	**1,613**	**1,610**	**1,607**	**1,594**	**1,583**	**1,573**	**1,565**	**1,557**	**1,551**	**1,545**	**1,540**	**1,535**	**1,531**	**1,524**
59	1,593	1,589	1,586	**1,582**	1,578	1,575	1,572	1,568	**1,565**	1,552	1,540	1,530	1,521	**1,514**	1,507	1,501	1,495	1,490	**1,486**	1,478
69	1,564	1,560	1,556	**1,552**	1,549	1,545	1,542	1,539	**1,536**	1,521	1,509	1,499	1,490	**1,482**	1,475	1,469	1,463	1,458	**1,453**	1,445
79	1,542	1,538	1,534	**1,530**	1,527	1,523	1,520	1,516	**1,513**	1,499	1,486	1,476	1,467	**1,458**	1,451	1,445	1,439	1,434	**1,429**	1,421
89	1,525	1,521	1,517	**1,513**	1,509	1,506	1,502	1,499	**1,496**	1,481	1,468	1,458	1,448	**1,440**	1,432	1,426	1,420	1,415	**1,410**	1,401
99	**1,512**	**1,508**	**1,503**	**1,499**	**1,496**	**1,492**	**1,488**	**1,485**	**1,482**	**1,467**	**1,454**	**1,443**	**1,433**	**1,425**	**1,417**	**1,411**	**1,405**	**1,399**	**1,394**	**1,385**
109	1,501	1,496	1,492	**1,488**	1,484	1,481	1,477	1,474	**1,470**	1,455	1,442	1,431	1,421	**1,413**	1,405	1,398	1,392	1,386	**1,381**	1,372
119	1,491	1,487	1,483	**1,479**	1,475	1,471	1,468	1,464	**1,461**	1,445	1,432	1,421	1,411	**1,402**	1,395	1,388	1,381	1,376	**1,370**	1,361
129	1,484	1,479	1,475	**1,471**	1,467	1,463	1,459	1,456	**1,453**	1,437	1,424	1,412	1,402	**1,394**	1,386	1,379	1,372	1,367	**1,361**	1,352
139	1,477	1,472	1,468	**1,464**	1,460	1,456	1,453	1,449	**1,446**	1,430	1,417	1,405	1,395	**1,386**	1,378	1,371	1,365	1,359	**1,353**	1,344
149	1,471	1,467	1,462	**1,458**	1,454	1,450	1,447	1,443	**1,440**	1,424	1,410	1,399	1,389	**1,380**	1,372	1,364	1,358	1,352	**1,347**	1,337
	$\alpha = 0{,}01$																			
16	3,012	3,006	3,001	**2,995**	2,990	2,985	2,981	2,976	**2,972**	2,952	2,936	2,922	2,910	**2,900**	2,891	2,883	2,876	2,870	**2,864**	2,854
19	**2,755**	**2,749**	**2,743**	**2,738**	**2,732**	**2,727**	**2,723**	**2,718**	**2,714**	**2,694**	**2,677**	**2,663**	**2,651**	**2,641**	**2,631**	**2,623**	**2,616**	**2,609**	**2,603**	**2,593**
24	2,486	2,480	2,474	**2,468**	2,463	2,458	2,453	2,448	**2,444**	2,424	2,407	2,392	2,380	**2,369**	2,359	2,351	2,343	2,336	**2,330**	2,320
29	**2,319**	**2,313**	**2,307**	**2,301**	**2,296**	**2,290**	**2,285**	**2,280**	**2,276**	**2,255**	**2,238**	**2,223**	**2,210**	**2,199**	**2,189**	**2,180**	**2,172**	**2,165**	**2,159**	**2,148**
39	**2,121**	**2,115**	**2,109**	**2,103**	**2,097**	**2,092**	**2,087**	**2,082**	**2,077**	**2,055**	**2,037**	**2,021**	**2,008**	**1,996**	**1,986**	**1,977**	**1,968**	**1,961**	**1,954**	**1,943**
49	**2,008**	**2,002**	**1,996**	**1,989**	**1,984**	**1,978**	**1,973**	**1,968**	**1,963**	**1,940**	**1,921**	**1,905**	**1,891**	**1,879**	**1,868**	**1,859**	**1,850**	**1,842**	**1,835**	**1,823**
59	1,935	1,928	1,922	**1,916**	1,910	1,904	1,899	1,893	**1,888**	1,865	1,846	1,829	1,815	**1,802**	1,791	1,781	1,772	1,764	**1,757**	1,744
69	1,883	1,876	1,870	**1,864**	1,858	1,852	1,846	1,841	**1,836**	1,812	1,793	1,776	1,761	**1,748**	1,737	1,726	1,717	1,709	**1,702**	1,688
79	1,845	1,838	1,831	**1,825**	1,819	1,813	1,807	1,802	**1,797**	1,773	1,753	1,736	1,721	**1,707**	1,696	1,685	1,676	1,668	**1,660**	1,646
89	1,815	1,808	1,802	**1,795**	1,789	1,783	1,777	1,772	**1,767**	1,743	1,722	1,705	1,689	**1,676**	1,664	1,653	1,644	1,635	**1,627**	1,614
99	**1,792**	**1,785**	**1,778**	**1,772**	**1,765**	**1,759**	**1,754**	**1,748**	**1,743**	**1,718**	**1,698**	**1,680**	**1,664**	**1,651**	**1,639**	**1,628**	**1,618**	**1,609**	**1,601**	**1,588**
109	1,773	1,766	1,759	**1,752**	1,746	1,740	1,734	1,728	**1,723**	1,699	1,678	1,660	1,644	**1,630**	1,618	1,607	1,597	1,588	**1,580**	1,566
119	1,757	1,750	1,743	**1,736**	1,730	1,724	1,718	1,712	**1,707**	1,682	1,661	1,643	1,627	**1,613**	1,601	1,590	1,580	1,571	**1,562**	1,548
129	1,743	1,736	1,729	**1,723**	1,716	1,710	1,704	1,699	**1,693**	1,668	1,647	1,629	1,613	**1,599**	1,586	1,575	1,565	1,556	**1,547**	1,533
139	1,732	1,725	1,718	**1,711**	1,705	1,698	1,693	1,687	**1,681**	1,656	1,635	1,616	1,600	**1,586**	1,573	1,562	1,552	1,543	**1,534**	1,520
149	1,722	1,715	1,708	**1,701**	1,695	1,688	1,682	1,677	**1,671**	1,646	1,624	1,606	1,590	**1,575**	1,563	1,551	1,541	1,532	**1,523**	1,508

df_2	**Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1**																			
	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**54**	**59**	**64**	**69**	**74**	**79**	**84**	**89**	**94**	**99**	**109**
	***α* = 0,05**																			
159	1,466	1,461	1,457	**1,453**	1,449	1,445	1,441	1,438	**1,434**	1,418	1,405	1,393	1,383	**1,374**	1,366	1,358	1,352	1,346	**1,340**	1,331
169	1,461	1,457	1,453	**1,448**	1,444	1,440	1,437	1,433	**1,430**	1,414	1,400	1,388	1,378	**1,369**	1,361	1,353	1,347	1,341	**1,335**	1,325
179	1,457	1,453	1,449	**1,444**	1,440	1,436	1,433	1,429	**1,425**	1,409	1,396	1,384	1,374	**1,364**	1,356	1,349	1,342	1,336	**1,330**	1,320
189	1,454	1,449	1,445	**1,441**	1,437	1,433	1,429	1,425	**1,422**	1,406	1,392	1,380	1,370	**1,360**	1,352	1,344	1,338	1,332	**1,326**	1,316
199	**1,451**	**1,446**	**1,442**	**1,437**	**1,433**	**1,429**	**1,426**	**1,422**	**1,418**	**1,402**	**1,388**	**1,376**	**1,366**	**1,357**	**1,348**	**1,341**	**1,334**	**1,328**	**1,322**	**1,312**
249	1,438	1,434	1,429	**1,425**	1,421	1,417	1,413	1,409	**1,406**	1,389	1,375	1,363	1,352	**1,343**	1,334	1,326	1,319	1,313	**1,307**	1,297
299	1,430	1,425	1,421	**1,417**	1,412	1,408	1,404	1,401	**1,397**	1,380	1,366	1,354	1,343	**1,333**	1,324	1,317	1,309	1,303	**1,297**	1,287
349	1,424	1,420	1,415	**1,411**	1,406	1,402	1,398	1,395	**1,391**	1,374	1,360	1,347	1,336	**1,326**	1,318	1,310	1,302	1,296	**1,290**	1,279
399	1,420	1,415	1,411	**1,406**	1,402	1,398	1,394	1,390	**1,386**	1,369	1,355	1,342	1,331	**1,321**	1,312	1,304	1,297	1,290	**1,284**	1,274
499	**1,414**	**1,409**	**1,404**	**1,400**	**1,396**	**1,391**	**1,387**	**1,384**	**1,380**	**1,363**	**1,348**	**1,335**	**1,324**	**1,314**	**1,305**	**1,297**	**1,290**	**1,283**	**1,277**	**1,266**
599	1,410	1,405	1,400	**1,396**	1,391	1,387	1,383	1,379	**1,376**	1,358	1,344	1,331	1,319	**1,309**	1,300	1,292	1,284	1,278	**1,271**	1,260
699	1,407	1,402	1,397	**1,393**	1,388	1,384	1,380	1,376	**1,372**	1,355	1,340	1,327	1,316	**1,306**	1,297	1,288	1,281	1,274	**1,268**	1,256
799	1,404	1,400	1,395	**1,390**	1,386	1,382	1,378	1,374	**1,370**	1,353	1,338	1,325	1,313	**1,303**	1,294	1,286	1,278	1,271	**1,265**	1,253
899	1,403	1,398	1,393	**1,389**	1,384	1,380	1,376	1,372	**1,368**	1,351	1,336	1,323	1,312	**1,301**	1,292	1,284	1,276	1,269	**1,263**	1,251
999	1,401	1,396	1,392	**1,387**	1,383	1,379	1,375	1,371	**1,367**	1,350	1,335	1,322	1,310	**1,300**	1,290	1,282	1,274	1,267	**1,261**	1,249
∞	**1,389**	**1,384**	**1,379**	**1,375**	**1,370**	**1,366**	**1,362**	**1,358**	**1,354**	**1,336**	**1,321**	**1,307**	**1,296**	**1,285**	**1,275**	**1,267**	**1,259**	**1,251**	**1,245**	**1,233**
	***α* = 0,01**																			
159	1,713	1,706	1,699	**1,692**	1,686	1,680	1,674	1,668	**1,662**	1,637	1,615	1,597	1,580	**1,566**	1,553	1,542	1,531	1,522	**1,513**	1,498
169	1,706	1,698	1,691	**1,685**	1,678	1,672	1,666	1,660	**1,654**	1,629	1,607	1,588	1,572	**1,557**	1,545	1,533	1,523	1,513	**1,504**	1,489
179	1,699	1,692	1,684	**1,678**	1,671	1,665	1,659	1,653	**1,647**	1,622	1,600	1,581	1,565	**1,550**	1,537	1,525	1,515	1,505	**1,497**	1,481
189	1,693	1,685	1,678	**1,672**	1,665	1,659	1,653	1,647	**1,641**	1,616	1,594	1,575	1,558	**1,543**	1,530	1,519	1,508	1,498	**1,490**	1,474
199	**1,687**	**1,680**	**1,673**	**1,666**	**1,659**	**1,653**	**1,647**	**1,641**	**1,636**	**1,610**	**1,588**	**1,569**	**1,552**	**1,537**	**1,524**	**1,512**	**1,502**	**1,492**	**1,483**	**1,468**
249	1,667	1,659	1,652	**1,645**	1,638	1,632	1,626	1,620	**1,614**	1,588	1,566	1,546	1,530	**1,515**	1,501	1,489	1,478	1,468	**1,459**	1,443
299	1,653	1,645	1,638	**1,631**	1,624	1,618	1,612	1,606	**1,600**	1,574	1,551	1,532	1,514	**1,499**	1,486	1,473	1,462	1,452	**1,443**	1,427
349	1,643	1,635	1,628	**1,621**	1,614	1,608	1,602	1,596	**1,590**	1,563	1,541	1,521	1,504	**1,488**	1,475	1,462	1,451	1,441	**1,431**	1,415
399	1,636	1,628	1,621	**1,614**	1,607	1,600	1,594	1,588	**1,582**	1,556	1,533	1,513	1,495	**1,480**	1,466	1,454	1,442	1,432	**1,423**	1,406
499	**1,625**	**1,618**	**1,610**	**1,603**	**1,596**	**1,590**	**1,584**	**1,578**	**1,572**	**1,545**	**1,522**	**1,502**	**1,484**	**1,468**	**1,454**	**1,442**	**1,430**	**1,420**	**1,410**	**1,393**
599	1,618	1,611	1,603	**1,596**	1,590	1,583	1,577	1,570	**1,565**	1,538	1,514	1,494	1,476	**1,461**	1,447	1,434	1,422	1,412	**1,402**	1,385
699	1,614	1,606	1,598	**1,591**	1,585	1,578	1,572	1,565	**1,559**	1,532	1,509	1,489	1,471	**1,455**	1,441	1,428	1,416	1,406	**1,396**	1,379
799	1,610	1,602	1,595	**1,588**	1,581	1,574	1,568	1,562	**1,556**	1,528	1,505	1,485	1,467	**1,451**	1,437	1,424	1,412	1,401	**1,392**	1,374
899	1,607	1,599	1,592	**1,585**	1,578	1,571	1,565	1,559	**1,553**	1,525	1,502	1,482	1,464	**1,448**	1,433	1,420	1,409	1,398	**1,388**	1,371
999	1,605	1,597	1,590	**1,582**	1,576	1,569	1,562	1,556	**1,550**	1,523	1,500	1,479	1,461	**1,445**	1,431	1,418	1,406	1,395	**1,385**	1,368
∞	**1,584**	**1,576**	**1,569**	**1,562**	**1,555**	**1,548**	**1,541**	**1,535**	**1,529**	**1,501**	**1,477**	**1,457**	**1,438**	**1,422**	**1,407**	**1,394**	**1,381**	**1,370**	**1,360**	**1,342**

Критические значения распределения Фишера $F_{\alpha}(df_1, df_2)$ *(продолжение)*

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	119	129	139	149	159	169	179	189	199	249	299	349	399	499	599	699	799	899	999	∞
	α = 0,05																			
1	253	253	253	253	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254	254
2	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,550	8,548	8,546	8,545	8,544	8,543	8,542	8,541	8,540	8,538	8,536	8,534	8,533	8,532	8,531	8,530	8,530	8,530	8,529	8,526
4	5,658	5,656	5,654	5,652	5,651	5,649	5,648	5,647	5,646	5,643	5,640	5,638	5,637	5,635	5,634	5,633	5,633	5,632	5,632	5,628
5	4,399	4,396	4,394	4,392	4,390	4,389	4,387	4,386	4,385	4,381	4,378	4,377	4,375	4,373	4,372	4,371	4,370	4,369	4,369	4,365
6	3,705	3,702	3,700	3,698	3,696	3,694	3,693	3,692	3,691	3,686	3,683	3,681	3,680	3,678	3,676	3,675	3,674	3,674	3,673	3,669
7	3,268	3,265	3,262	3,260	3,258	3,257	3,255	3,254	3,253	3,248	3,245	3,243	3,241	3,239	3,237	3,236	3,235	3,235	3,234	3,230
8	2,967	2,964	2,962	2,959	2,957	2,956	2,954	2,953	2,951	2,947	2,943	2,941	2,940	2,937	2,936	2,934	2,934	2,933	2,932	2,928
9	2,748	2,745	2,742	2,740	2,738	2,736	2,734	2,733	2,731	2,727	2,723	2,721	2,719	2,717	2,715	2,714	2,713	2,712	2,712	2,707
10	2,580	2,577	2,574	2,572	2,570	2,568	2,566	2,565	2,564	2,558	2,555	2,553	2,551	2,548	2,546	2,545	2,544	2,544	2,543	2,538
11	2,448	2,445	2,442	2,440	2,437	2,436	2,434	2,432	2,431	2,426	2,422	2,420	2,418	2,415	2,413	2,412	2,411	2,410	2,410	2,404
12	2,341	2,338	2,335	2,332	2,330	2,328	2,326	2,325	2,323	2,318	2,314	2,312	2,310	2,307	2,305	2,304	2,303	2,302	2,302	2,296
13	2,253	2,249	2,246	2,244	2,241	2,239	2,237	2,236	2,234	2,229	2,225	2,222	2,220	2,218	2,216	2,214	2,213	2,213	2,212	2,206
14	2,178	2,175	2,171	2,169	2,166	2,164	2,163	2,161	2,159	2,154	2,150	2,147	2,145	2,142	2,140	2,139	2,138	2,137	2,136	2,131
15	2,114	2,111	2,108	2,105	2,102	2,100	2,098	2,097	2,095	2,089	2,085	2,083	2,081	2,078	2,076	2,074	2,073	2,072	2,072	2,066
	α = 0,01																			
1	6340	6341	6343	6344	6346	6347	6348	6349	6350	6353	6355	6357	6358	6360	6361	6361	6362	6362	6363	6366
2	99,49	99,49	99,49	99,49	99,49	99,49	99,49	99,49	99,49	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50
3	26,22	26,21	26,21	26,20	26,20	26,19	26,19	26,19	26,18	26,17	26,16	26,16	26,15	26,15	26,14	26,14	26,14	26,14	26,14	26,13
4	13,56	13,55	13,55	13,54	13,53	13,53	13,53	13,52	13,52	13,51	13,50	13,50	13,49	13,49	13,48	13,48	13,48	13,48	13,47	13,46
5	9,112	9,105	9,099	9,094	9,089	9,085	9,082	9,079	9,076	9,064	9,057	9,052	9,048	9,042	9,039	9,036	9,034	9,033	9,032	9,020
6	6,970	6,963	6,957	6,952	6,947	6,943	6,940	6,937	6,934	6,923	6,916	6,911	6,907	6,901	6,898	6,895	6,894	6,892	6,891	6,880
7	5,738	5,731	5,725	5,720	5,716	5,712	5,709	5,705	5,703	5,692	5,685	5,680	5,676	5,671	5,667	5,665	5,663	5,661	5,660	5,650
8	4,947	4,940	4,934	4,929	4,925	4,921	4,918	4,914	4,912	4,901	4,894	4,889	4,885	4,880	4,876	4,874	4,872	4,871	4,869	4,859
9	4,398	4,392	4,386	4,381	4,377	4,373	4,369	4,366	4,363	4,353	4,346	4,341	4,337	4,332	4,328	4,326	4,324	4,322	4,321	4,311
10	3,997	3,990	3,985	3,980	3,975	3,971	3,968	3,965	3,962	3,951	3,944	3,939	3,936	3,930	3,927	3,924	3,922	3,921	3,920	3,909
11	3,691	3,684	3,679	3,674	3,669	3,665	3,662	3,659	3,656	3,645	3,638	3,633	3,629	3,624	3,620	3,618	3,616	3,614	3,613	3,602
12	3,450	3,443	3,437	3,432	3,428	3,424	3,421	3,417	3,415	3,404	3,397	3,392	3,388	3,382	3,379	3,376	3,374	3,373	3,372	3,361
13	3,255	3,249	3,243	3,238	3,233	3,229	3,226	3,222	3,220	3,209	3,202	3,196	3,193	3,187	3,184	3,181	3,179	3,177	3,176	3,165
14	3,095	3,088	3,082	3,077	3,072	3,068	3,065	3,062	3,059	3,048	3,041	3,035	3,031	3,026	3,022	3,020	3,018	3,016	3,015	3,004
15	2,960	2,953	2,947	2,942	2,937	2,933	2,930	2,927	2,924	2,913	2,905	2,900	2,896	2,891	2,887	2,884	2,882	2,881	2,880	2,868

df_2	Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1																			
	119	129	139	149	159	169	179	189	199	249	299	349	399	499	599	699	799	899	999	∞
	$\alpha = 0{,}05$																			
16	2,059	2,056	2,052	2,050	2,047	2,045	2,043	2,041	2,040	2,034	2,030	2,027	2,025	2,022	2,020	2,018	2,017	2,016	2,016	2,010
19	1,931	1,927	1,923	1,920	1,918	1,915	1,913	1,912	1,910	1,904	1,899	1,896	1,894	1,891	1,889	1,887	1,886	1,885	1,884	1,878
24	1,790	1,786	1,782	1,779	1,776	1,774	1,771	1,769	1,768	1,761	1,756	1,753	1,751	1,747	1,745	1,743	1,742	1,741	1,740	1,733
29	1,699	1,694	1,690	1,687	1,684	1,681	1,679	1,677	1,675	1,667	1,663	1,659	1,656	1,653	1,650	1,648	1,647	1,646	1,645	1,638
39	1,585	1,580	1,576	1,572	1,569	1,566	1,564	1,561	1,559	1,551	1,546	1,542	1,539	1,535	1,532	1,530	1,528	1,527	1,526	1,518
49	1,517	1,512	1,508	1,503	1,500	1,497	1,494	1,492	1,489	1,481	1,475	1,470	1,467	1,463	1,460	1,457	1,456	1,455	1,453	1,444
59	1,472	1,466	1,461	1,457	1,453	1,450	1,447	1,444	1,442	1,433	1,426	1,422	1,418	1,413	1,410	1,408	1,406	1,405	1,404	1,394
69	1,439	1,433	1,428	1,423	1,419	1,416	1,413	1,410	1,407	1,398	1,391	1,386	1,383	1,377	1,374	1,371	1,370	1,368	1,367	1,356
79	1,414	1,407	1,402	1,398	1,394	1,390	1,387	1,384	1,381	1,371	1,364	1,359	1,355	1,350	1,346	1,343	1,341	1,340	1,339	1,327
89	1,394	1,388	1,382	1,377	1,373	1,369	1,366	1,363	1,360	1,350	1,343	1,337	1,333	1,328	1,324	1,321	1,319	1,317	1,316	1,304
99	1,378	1,371	1,366	1,361	1,357	1,353	1,349	1,346	1,343	1,332	1,325	1,320	1,315	1,310	1,306	1,303	1,301	1,299	1,297	1,285
109	1,365	1,358	1,352	1,347	1,343	1,339	1,336	1,332	1,329	1,318	1,310	1,305	1,301	1,294	1,290	1,287	1,285	1,283	1,282	1,269
119	1,354	1,347	1,341	1,336	1,331	1,327	1,324	1,321	1,318	1,306	1,298	1,292	1,288	1,282	1,277	1,274	1,272	1,270	1,269	1,255
129	1,344	1,337	1,331	1,326	1,322	1,318	1,314	1,310	1,307	1,296	1,288	1,282	1,277	1,271	1,266	1,263	1,261	1,259	1,257	1,243
139	1,336	1,329	1,323	1,318	1,313	1,309	1,305	1,302	1,299	1,287	1,278	1,272	1,268	1,261	1,256	1,253	1,251	1,249	1,247	1,233
149	1,329	1,322	1,316	1,310	1,306	1,301	1,298	1,294	1,291	1,279	1,270	1,264	1,259	1,252	1,248	1,245	1,242	1,240	1,238	1,223
	$\alpha = 0{,}01$																			
16	2,845	2,838	2,832	2,827	2,823	2,818	2,815	2,812	2,809	2,798	2,790	2,785	2,781	2,775	2,772	2,769	2,767	2,765	2,764	2,753
19	2,585	2,577	2,571	2,566	2,561	2,557	2,553	2,550	2,547	2,536	2,528	2,522	2,518	2,512	2,509	2,506	2,504	2,502	2,501	2,489
24	2,311	2,303	2,297	2,291	2,286	2,282	2,278	2,274	2,271	2,259	2,251	2,246	2,241	2,235	2,231	2,228	2,226	2,224	2,223	2,211
29	2,139	2,131	2,124	2,118	2,113	2,109	2,105	2,101	2,098	2,085	2,077	2,071	2,066	2,060	2,056	2,053	2,050	2,048	2,047	2,034
39	1,933	1,925	1,917	1,911	1,906	1,901	1,896	1,893	1,889	1,876	1,866	1,860	1,855	1,848	1,844	1,840	1,838	1,836	1,834	1,820
49	1,813	1,804	1,797	1,790	1,784	1,779	1,774	1,770	1,767	1,752	1,743	1,736	1,731	1,723	1,718	1,715	1,712	1,710	1,708	1,693
59	1,734	1,725	1,717	1,710	1,704	1,698	1,694	1,689	1,685	1,670	1,660	1,653	1,647	1,640	1,634	1,631	1,628	1,626	1,624	1,608
69	1,677	1,668	1,660	1,653	1,646	1,641	1,636	1,631	1,627	1,612	1,601	1,593	1,588	1,579	1,574	1,570	1,567	1,565	1,563	1,546
79	1,635	1,625	1,617	1,610	1,603	1,597	1,592	1,588	1,583	1,567	1,556	1,548	1,542	1,534	1,528	1,524	1,521	1,518	1,516	1,498
89	1,602	1,592	1,584	1,576	1,569	1,563	1,558	1,553	1,549	1,532	1,521	1,513	1,506	1,498	1,492	1,487	1,484	1,482	1,479	1,461
99	1,576	1,566	1,557	1,549	1,542	1,536	1,531	1,526	1,521	1,504	1,492	1,484	1,477	1,468	1,462	1,458	1,454	1,452	1,450	1,430
109	1,554	1,544	1,535	1,527	1,520	1,514	1,508	1,503	1,498	1,481	1,469	1,460	1,453	1,444	1,438	1,433	1,429	1,427	1,425	1,404
119	1,536	1,525	1,516	1,508	1,501	1,495	1,489	1,484	1,479	1,461	1,449	1,440	1,433	1,423	1,417	1,412	1,408	1,406	1,403	1,383
129	1,520	1,510	1,500	1,492	1,485	1,479	1,473	1,468	1,463	1,444	1,432	1,423	1,416	1,406	1,399	1,394	1,390	1,388	1,385	1,364
139	1,507	1,496	1,487	1,479	1,471	1,465	1,459	1,454	1,449	1,430	1,417	1,408	1,401	1,390	1,384	1,379	1,375	1,372	1,369	1,347
149	1,495	1,485	1,475	1,467	1,459	1,453	1,447	1,441	1,436	1,417	1,404	1,395	1,387	1,377	1,370	1,365	1,361	1,358	1,355	1,333

df_2	**Число степеней свободы для бóльшей дисперсии df_1**																			
	119	**129**	**139**	**149**	**159**	**169**	**179**	**189**	**199**	**249**	**299**	**349**	**399**	**499**	**599**	**699**	**799**	**899**	**999**	**∞**
	α = 0,05																			
159	1,323	1,316	1,309	**1,304**	1,299	1,295	1,291	1,287	**1,284**	1,272	1,263	1,257	1,252	**1,245**	1,240	1,237	1,234	1,232	1,231	**1,215**
169	1,317	1,310	1,304	**1,298**	1,293	1,289	1,285	1,281	**1,278**	1,265	1,257	1,250	1,245	**1,238**	1,233	1,230	1,227	1,225	1,223	**1,208**
179	1,312	1,305	1,299	**1,293**	1,288	1,284	1,280	1,276	**1,273**	1,260	1,251	1,244	1,239	**1,232**	1,227	1,224	1,221	1,219	1,217	**1,201**
189	1,308	1,300	1,294	**1,288**	1,283	1,279	1,275	1,271	**1,268**	1,255	1,246	1,239	1,234	**1,227**	1,222	1,218	1,215	1,213	1,211	**1,195**
199	**1,304**	**1,296**	**1,290**	**1,284**	**1,279**	**1,275**	**1,270**	**1,267**	**1,263**	**1,250**	**1,241**	**1,234**	**1,229**	**1,222**	**1,216**	**1,213**	**1,210**	**1,208**	**1,206**	**1,189**
249	1,288	1,280	1,274	**1,268**	1,263	1,258	1,254	1,250	**1,246**	1,232	1,223	1,215	1,210	**1,202**	1,196	1,192	1,189	1,187	1,185	**1,166**
299	1,278	1,270	1,263	**1,257**	1,251	1,246	1,242	1,238	**1,234**	1,220	1,210	1,202	1,197	**1,188**	1,182	1,178	1,175	1,172	1,170	**1,150**
349	1,270	1,262	1,255	**1,249**	1,243	1,238	1,234	1,230	**1,226**	1,211	1,201	1,193	1,187	**1,178**	1,172	1,168	1,164	1,161	1,159	**1,138**
399	1,264	1,256	1,249	**1,243**	1,237	1,232	1,227	1,223	**1,219**	1,204	1,193	1,185	1,179	**1,170**	1,164	1,159	1,156	1,153	1,151	**1,128**
499	**1,256**	**1,248**	**1,241**	**1,234**	**1,228**	**1,223**	**1,218**	**1,214**	**1,210**	**1,194**	**1,183**	**1,175**	**1,168**	**1,159**	**1,152**	**1,147**	**1,143**	**1,140**	**1,138**	**1,113**
599	1,251	1,242	1,235	**1,228**	1,222	1,217	1,212	1,208	**1,204**	1,188	1,176	1,168	1,161	**1,151**	1,144	1,139	1,135	1,132	1,129	**1,103**
699	1,247	1,238	1,231	**1,224**	1,218	1,213	1,208	1,203	**1,199**	1,183	1,171	1,162	1,155	**1,145**	1,138	1,133	1,128	1,125	1,122	**1,095**
799	1,244	1,235	1,228	**1,221**	1,215	1,209	1,204	1,200	**1,196**	1,179	1,167	1,158	1,151	**1,141**	1,133	1,128	1,124	1,120	1,117	**1,088**
899	1,241	1,233	1,225	**1,218**	1,212	1,207	1,202	1,197	**1,193**	1,176	1,164	1,155	1,148	**1,137**	1,130	1,124	1,120	1,116	1,113	**1,083**
999	1,239	1,231	1,223	**1,216**	1,210	1,205	1,200	1,195	**1,191**	1,174	1,162	1,152	1,145	**1,134**	1,127	1,121	1,116	1,113	1,110	**1,078**
∞	**1,222**	**1,213**	**1,205**	**1,198**	**1,191**	**1,185**	**1,180**	**1,175**	**1,170**	**1,152**	**1,138**	**1,128**	**1,119**	**1,106**	**1,097**	**1,090**	**1,084**	**1,079**	**1,075**	**1**
	α = 0,01																			
159	1,485	1,474	1,465	**1,456**	1,449	1,442	1,436	1,430	**1,425**	1,406	1,393	1,383	1,376	**1,365**	1,358	1,353	1,349	1,346	1,343	**1,320**
169	1,476	1,465	1,455	**1,447**	1,439	1,432	1,426	1,421	**1,416**	1,396	1,383	1,373	1,365	**1,355**	1,347	1,342	1,338	1,335	1,332	**1,308**
179	1,468	1,457	1,447	**1,439**	1,431	1,424	1,418	1,412	**1,407**	1,387	1,374	1,364	1,356	**1,345**	1,338	1,332	1,328	1,325	1,322	**1,298**
189	1,461	1,450	1,440	**1,431**	1,423	1,416	1,410	1,405	**1,399**	1,379	1,365	1,355	1,348	**1,336**	1,329	1,323	1,319	1,316	1,313	**1,288**
199	**1,455**	**1,443**	**1,433**	**1,424**	**1,417**	**1,410**	**1,403**	**1,398**	**1,392**	**1,372**	**1,358**	**1,348**	**1,340**	**1,329**	**1,321**	**1,315**	**1,311**	**1,308**	**1,305**	**1,279**
249	1,430	1,418	1,408	**1,398**	1,390	1,383	1,377	1,371	**1,365**	1,344	1,329	1,318	1,310	**1,298**	1,290	1,284	1,279	1,275	1,273	**1,245**
299	1,413	1,401	1,390	**1,381**	1,373	1,365	1,358	1,352	**1,347**	1,325	1,310	1,298	1,289	**1,277**	1,268	1,262	1,257	1,253	1,250	**1,220**
349	1,401	1,389	1,378	**1,368**	1,360	1,352	1,345	1,339	**1,333**	1,311	1,295	1,283	1,274	**1,261**	1,252	1,245	1,240	1,236	1,233	**1,201**
399	1,392	1,379	1,368	**1,359**	1,350	1,342	1,335	1,329	**1,323**	1,300	1,284	1,272	1,263	**1,249**	1,240	1,233	1,228	1,223	1,220	**1,187**
499	**1,379**	**1,366**	**1,355**	**1,345**	**1,336**	**1,328**	**1,321**	**1,315**	**1,309**	**1,285**	**1,268**	**1,256**	**1,246**	**1,232**	**1,222**	**1,215**	**1,209**	**1,205**	**1,201**	**1,165**
599	1,370	1,357	1,346	**1,336**	1,327	1,319	1,312	1,305	**1,299**	1,275	1,258	1,245	1,235	**1,220**	1,210	1,202	1,196	1,191	1,187	**1,149**
699	1,364	1,351	1,340	**1,330**	1,320	1,312	1,305	1,298	**1,292**	1,267	1,250	1,237	1,226	**1,211**	1,201	1,193	1,186	1,182	1,178	**1,137**
799	1,359	1,346	1,335	**1,325**	1,315	1,307	1,300	1,293	**1,287**	1,262	1,244	1,231	1,220	**1,205**	1,194	1,185	1,179	1,174	1,170	**1,127**
899	1,356	1,343	1,331	**1,321**	1,311	1,303	1,296	1,289	**1,282**	1,257	1,239	1,226	1,215	**1,199**	1,188	1,180	1,173	1,168	1,164	**1,119**
999	1,353	1,340	1,328	**1,318**	1,308	1,300	1,292	1,285	**1,279**	1,254	1,235	1,222	1,211	**1,195**	1,184	1,175	1,168	1,163	1,159	**1,113**
∞	**1,326**	**1,312**	**1,300**	**1,289**	**1,279**	**1,270**	**1,262**	**1,255**	**1,248**	**1,220**	**1,200**	**1,185**	**1,172**	**1,153**	**1,139**	**1,129**	**1,120**	**1,113**	**1,107**	**1,005**

V. Критические значения критерия Кочрена $G_{\alpha}(m, n)$

***n* – объем**	***m* – число выборок**															
	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	12	15	20	24	**30**	40	60	120
	α = 0,05															
2	0,9669	0,9065	**0,8412**	0,7808	0,7271	0,6798	0,6385	**0,6020**	0,5410	0,4709	0,3894	0,3434	**0,2929**	0,2370	0,1737	0,0998
3	0,8709	0,7679	**0,6838**	0,6161	0,5612	0,5157	0,4775	**0,4450**	0,3924	0,3346	0,2705	0,2354	**0,1980**	0,1576	0,1131	0,0632
4	0,7977	0,6841	**0,5981**	0,5321	0,4800	0,4377	0,4027	**0,3733**	0,3264	0,2758	0,2205	0,1907	**0,1593**	0,1259	0,0895	0,0495
5	**0,7457**	**0,6287**	**0,5441**	**0,4803**	**0,4307**	**0,3910**	**0,3584**	**0,3311**	**0,2880**	**0,2419**	**0,1921**	**0,1656**	**0,1377**	**0,1082**	**0,0765**	**0,0419**
6	0,7071	0,5895	**0,5065**	0,4447	0,3974	0,3595	0,3286	**0,3029**	0,2624	0,2195	0,1735	0,1493	**0,1237**	0,0968	0,0682	0,0371
7	0,6771	0,5598	**0,4783**	0,4184	0,3726	0,3362	0,3067	**0,2823**	0,2439	0,2034	0,1602	0,1374	**0,1137**	0,0887	0,0623	0,0337
8	0,6530	0,5365	**0,4564**	0,3980	0,3535	0,3185	0,2901	**0,2666**	0,2299	0,1911	0,1501	0,1286	**0,1061**	0,0827	0,0583	0,0120
9	0,6333	0,5175	**0,4387**	0,3817	0,3384	0,3043	0,3768	**0,2541**	0,2187	0,1815	0,1422	0,1213	**0,1002**	0,0780	0,0552	0,0292
10	**0,6167**	**0,5017**	**0,4241**	**0,3682**	**0,3259**	**0,2926**	**0,2659**	**0,2439**	**0,2098**	**0,1736**	**0,1357**	**0,1160**	**0,0958**	**0,0745**	**0,0520**	**0,0279**
11	0,6025	0,4884	**0,4118**	0,3568	0,3154	0,2829	0,2568	**0,2353**	0,2020	0,1671	0,1303	0,1113	**0,0921**	0,0713	0,0497	0,0266
17	0,5466	0,4366	**0,3645**	0,3135	0,2756	0,2462	0,2226	**0,2032**	0,1737	0,1429	0,1108	0,0942	**0,0771**	0,0595	0,0411	0,0218
37	0,4748	0,3720	**0,3066**	0,2612	0,2278	0,2022	0,1820	**0,1655**	0,1403	0,1144	0,0879	0,0743	**0,0604**	0,0462	0,0316	0,0165
145	0,4031	0,3093	**0,2513**	0,2119	0,1833	0,1616	0,1446	**0,1308**	0,1100	0,0889	0,0675	0,0567	**0,0457**	0,0347	0,0234	0,0120
∞	0,3333	0,2500	**0,2000**	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	**0,1000**	0,0833	0,0667	0,0500	0,0417	**0,0333**	0,0250	0,0167	0,0083
	α = 0,01															
2	0,9933	0,9676	**0,9279**	0,8228	0,8376	0,7945	0,7544	**0,7175**	0,6528	0,5747	0,4799	0,4247	**0,3632**	0,2970	0,2151	0,0123
3	0,9423	0,8643	**0,6957**	0,7218	0,6644	0,6152	0,5727	**0,5358**	0,4751	0,4069	0,3297	0,2871	**0,2412**	0,1915	0,1371	0,0759
4	0,8831	0,7814	**0,6957**	0,6258	0,5685	0,5209	0,4810	**0,4469**	0,3919	0,3317	0,2654	0,2295	**0,1913**	0,1508	0,1069	0,0585
5	**0,8335**	**0,7212**	**0,6329**	**0,5635**	**0,5080**	**0,4627**	**0,4251**	**0,3934**	**0,3328**	**0,2882**	**0,2288**	**0,1970**	**0,1635**	**0,1281**	**0,0902**	**0,0489**
6	0,7933	0,6761	**0,5875**	0,5195	0,4695	0,4226	0,3870	**0,3572**	0,3099	0,2593	0,2048	0,1759	**0,1454**	0,1135	0,0796	0,0429
7	0,7606	0,6410	**0,5531**	0,4866	0,4347	0,3932	0,3592	**0,3308**	0,2861	0,2386	0,1877	0,1608	**0,1327**	0,1033	0,0722	0,0387
8	0,7335	0,6129	**0,5259**	0,4608	0,4105	0,3704	0,3378	**0,3106**	0,2680	0,2228	0,1748	0,1495	**0,1232**	0,0957	0,0668	0,0357
9	0,7107	0,5897	**0,5037**	0,4401	0,3911	0,3522	0,3207	**0,2945**	0,2535	0,2104	0,1646	0,1406	**0,1157**	0,0898	0,0625	0,0334
10	**0,6912**	**0,5702**	**0,4854**	**0,4229**	**0,3751**	**0,3373**	**0,3067**	**0,2813**	**0,2419**	**0,2002**	**0,1567**	**0,1338**	**0,1100**	**0,0853**	**0,0594**	**0,0316**
11	0,6743	0,5536	**0,4697**	0,4084	0,3616	0,3248	0,2950	**0,2704**	0,2320	0,1918	0,1501	0,1283	**0,1054**	0,0816	0,0567	0,0302
17	0,6059	0,4884	**0,4094**	0,3529	0,3105	0,2779	0,2514	**0,2297**	0,1961	0,1612	0,1248	0,1060	**0,0867**	0,0668	0,0461	0,0242
37	0,5153	0,4057	**0,3351**	0,2858	0,2494	0,2214	0,1992	**0,1811**	0,1535	0,1251	0,0960	0,0810	**0,0658**	0,0503	0,0344	0,0178
145	0,4230	0,3251	**0,2644**	0,2229	0,1929	0,1700	0,1521	**0,1376**	0,1157	0,0934	0,0709	0,0595	**0,0480**	0,0363	0,0245	0,0125
∞	0,3333	0,2500	**0,2000**	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	**0,1000**	0,0833	0,0667	0,0500	0,0417	**0,0333**	0,0250	0,0167	0,0083

VI. Критические значения критерия Хартлея $F_{\alpha}(m, n)$

***n* – объем**	***m* – число выборок**									
	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12
	***α* = 0,05**									
3	87,5	142	**202**	266	333	403	475	**550**	626	704
4	27,8	39,2	**50,7**	62,0	72,9	83,5	93,9	**104**	114	124
5	**15,5**	**20,6**	**25,2**	**29,5**	**33,6**	**37,5**	**41,1**	**44,6**	**48,0**	**51,4**
6	10,8	13,7	**16,3**	18,7	20,8	22,9	24,7	**26,5**	28,2	29,9
7	8,38	10,4	**21,1**	13,7	15,0	16,3	17,5	**18,6**	19,7	20,7
8	6,94	8,44	**9,7**	10,8	11,8	12,7	13,5	**14,3**	15,1	15,8
9	6,00	7,18	**8,12**	9,03	9,78	10,5	11,1	**11,7**	12,2	12,7
10	**5,34**	**6,31**	**7,11**	**7,80**	**8,41**	**8,95**	**9,45**	**9,91**	**10,3**	**10,7**
11	4,85	5,67	**6,34**	6,92	7,42	7,87	8,28	**8,66**	9,01	9,34
13	4,16	4,79	**5,30**	5,72	6,09	6,42	6,72	**7,00**	7,25	7,48
16	3,54	4,01	**4,37**	4,68	4,95	5,19	5,40	**5,59**	5,77	5,93
21	2,95	3,29	**3,54**	3,76	3,94	4,10	4,24	**4,37**	4,49	4,59
31	2,40	2,61	**2,78**	2,91	3,02	3,12	3,21	**3,29**	3,36	3,39
61	1,85	1,96	**2,04**	2,11	2,17	2,22	2,26	**2,3**	2,33	2,36
	***α* = 0,01**									
3	448	729	**1036**	1362	1705	2063	2432	**2813**	3204	3605
4	85	120	**151**	184	216	249	281	**310**	337	361
5	**37**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**97**	**106**	**113**	**120**
6	22	28	**33**	38	42	46	50	**54**	57	60
7	15,5	19,1	**22**	25	27	30	32	**34**	36	37
8	12,1	14,5	**16,5**	18,4	20	22	23	**24**	26	27
9	9,9	11,7	**13,2**	14,5	15,8	16,9	17,9	**18,9**	19,8	21
10	**8,5**	**9,9**	**11,1**	**12,1**	**13,1**	**13,9**	**14,7**	**15,3**	**16,0**	**16,6**
11	7,4	8,6	**9,6**	10,4	11,1	11,8	12,4	**12,9**	13,4	13,9
13	6,1	6,9	**7,6**	8,2	8,7	9,1	9,5	**9,9**	10,2	10,6
16	4,9	5,5	**6,0**	6,4	6,7	7,1	7,3	**7,5**	7,8	8,0
21	3,8	4,3	**4,6**	4,9	5,1	5,3	5,5	**5,6**	5,8	5,9
31	3,0	3,3	**3,4**	3,6	3,7	3,8	3,9	**4,0**	4,1	4,2
61	2,2	2,3	**2,4**	2,4	2,5	2,5	2,6	**2,6**	2,7	2,7

Учебное издание

Харченко Максим Андреевич

ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Учебное пособие для вузов

Редактор Л.М. Носилова

Подписано в печать 27.06.08. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,7.
Тираж 100 экз. Заказ 1286.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_ctnter@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133.